РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

М. С. Цыганова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Учебное пособие

Тюмень
Издательство
Тюменского государственного университета
2016

УДК 330.4(075.8)

ББК 65в6я73

Ц941

М. С. Цыганова. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ: Учебное пособие для студентов направления «Прикладная информатика». Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2016. 249 с.

Учебное пособие содержит теоретические сведения и практические задания для самостоятельного выполнения по темам дисциплины «Моделирование экономических процессов и систем», предусмотренным рабочей программой данной дисциплины. Рассматриваются математические методы исследования экономических процессов и систем на макро- и микро-уровне. Изложение материала сопровождается разобранными примерами. Прилагается список литературы, рекомендованной для самостоятельного изучения. Предназначено для студентов направления «Прикладная информатика» очной и заочной форм обучения.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ: Моделирование экономических процессов и систем [электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.umk3plus.utmn.ru, свободный.

Рекомендовано к изданию кафедрой информационных систем. Утверждено первым проректором Тюменского государственного университета.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР: **А. В. Трофимова**, зав. отделом учебно-методического обеспечения Института дистанционного образования ТюмГУ

РЕЦЕНЗЕНТЫ: **О. Л. Уманская**, к. т. н., доцент кафедры прикладной механики ТюмГНГУ

Ю. В. Бидуля, к. филол. н., доцент кафедры информационных систем ТюмГУ

Оглавление

Введение

Одна из важнейших задач исследования экономических процессов – обоснование управленческих решений. Существенное усложнение в XX в. проблем управления способствовало интенсивному развитию методов анализа этих проблем. Использование системного подхода, без которого невозможна организация эффективного управления, включает, наряду с содержательным анализом изучаемых процессов, применение методов математического моделирования.

Согласно экономической теории, в экономике действуют устойчивые количественные закономерности. Следовательно, возможно формализованное описание этих закономерностей и изучение полученных математических моделей. Значение математического моделирования как метода исследований определяется тем, что модель представляет собой инструмент анализа изучаемых процессов и их прогнозирование.

На современном этапе экономика рассматривается как сложная развивающаяся система, для количественного описания которой применяются динамические математические модели различной степени сложности. Следует подчеркнуть, что анализ этих моделей стал возможным только благодаря появлению и развитию электронных средств вычислительной техники. Математическое моделирование сложных экономических систем включает построение формальных моделей изучаемых процессов, алгоритмизацию полученных моделей и их машинную реализацию, выполнение расчетов, анализ и интерпретацию полученных результатов. Результаты прогнозирования поведения реальных систем, полученные методом математического моделирования, могут являться основой для формирования обоснованных решений по управлению этими системами.

В настоящем пособии рассматриваются базовые модели макро- и микроэкономических систем. Методом построения и исследования этих моделей является системный анализ экономики как сложной динамической системы.

1. Экономическая система как объект математического моделирования

Экономика как система.

Системой называется совокупность взаимосвязанных объектов, совместно реализующих определенные цели. *Элементами* называются части системы, которые в рамках данного исследования считаются неделимыми. Как правило, любая исследуемая система представляет собой элемент системы более высокого порядка – *надсистемы*.

Подсистемой называется часть системы, выделенная по определенному признаку, обладающая некоторой самостоятельностью, и обладающая всеми свойствами системы. Расчленение системы на подсистемы чаще всего производится на основании определения независимой функции, выполняемой данной совокупностью элементов для достижения некоей частной цели, обеспечивающей достижение общей цели системы.

Рассматривая экономику как систему, можно зафиксировать следующие основные положения.

Основной *целью* экономики является обеспечение общества предметами потребления, в том числе, создающими условия для безопасности общества. *Элементы экономики* – это хозяйственные единицы (предприятия, фирмы, банки и т. п.). *Надсистему* национальной экономики образуют природа, мировая экономика, общество. В экономике можно выделить две главные *подсистемы*: производственную и финансово-кредитную.

Особенности экономики как объекта моделирования.

При рассмотрении экономики в качестве объекта моделирования можно отметить следующие особенности этого объекта [1].

1. В экономике невозможны модели подобия, широко применяемые в технике, когда создается точная (уменьшенная) копия реального

технического объекта, и отрабатываются (с необходимой корректировкой проектных решений) различные режимы его функционирования. Причина – невозможность создания копии экономики и отработки на ней различных вариантов экономической политики.

2. В экономике ограничены возможности локальных экспериментов. Причина – сильная взаимосвязь различных частей системы друг с другом (поэтому «чистый» эксперимент невозможен).

Вследствие указанных особенностей существенно возрастает роль математического моделирования как метода исследования экономических процессов и систем. Фактически, построение и анализ математических моделей становится основным методом экономических исследований. Анализ прошлого опыта развития экономических систем различных стран способствует формированию концептуальных моделей развития экономики, которые, в свою очередь, составляют основу для создания математических моделей.

Структура экономики как объекта математического моделирования.

При выполнении своей основной функции экономическая система осуществляет следующие действия:

- размещает ресурсы;
- производит продукцию;
- распределяет предметы потребления;
- осуществляет накопление.

Принципиальная схема производства и потребления [1] показана на рис. 1.1.

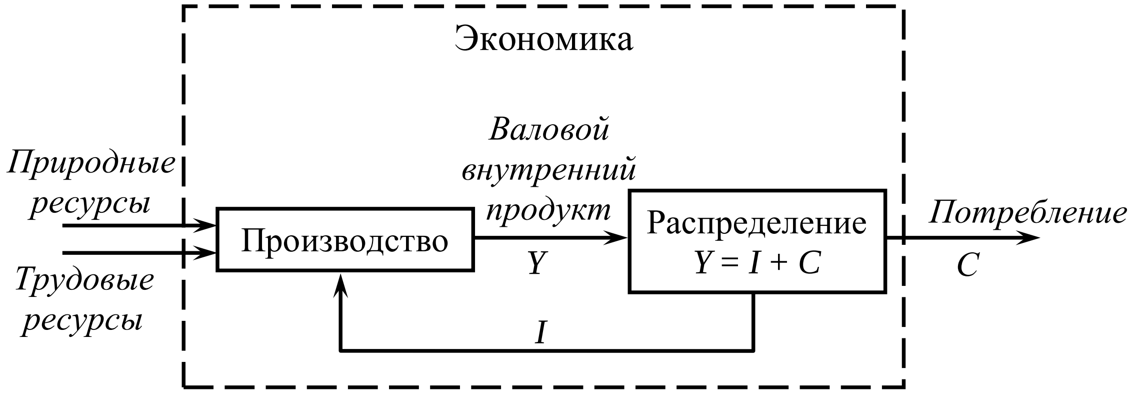


Рисунок 1.1. Принципиальная схема производства и потребления.

Материальные ресурсы включают в себя *трудовые ресурсы*, *природные ресурсы*, а также *средства производства* (см. рис. 1.2). При этом каждый член общества по отношению к экономической системе выступает в двоякой роли: с одной стороны, как работник, с другой – как потребитель.

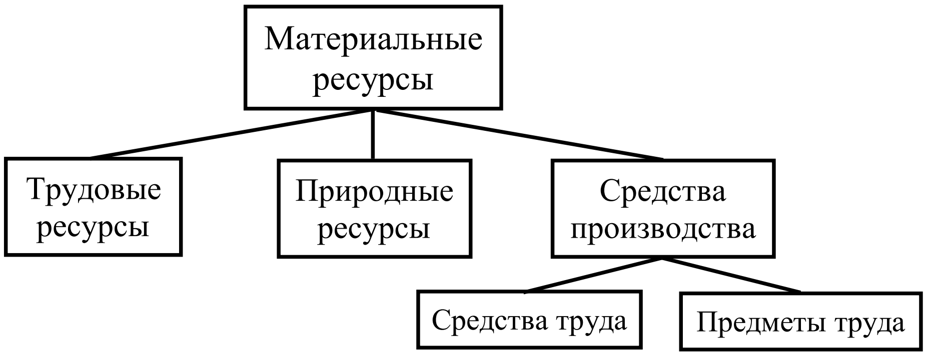


Рисунок 1.2. Основные виды материальных ресурсов.

Средства производства подразделяются на *средства труда* (или орудия труда) и *предметы труда*. Средства (орудия) труда могут участвовать в нескольких производственных циклах, вплоть до их замены вследствие износа или устаревания. Предметы труда участвуют только в одном производственном цикле. Примерами предметов труда могут служить материалы, используемые в процессе производства (например, цемент, используемый при строительстве объектов).

Накопленные средства производственной сферы образуют *производственные фонды*. Производственные фонды состоят из *основных производственных фондов* (ОПФ), представляющих собой накопленные средства труда, и *основных оборотных фондов* – накопленных предметов труда.

ОПФ участвуют в производстве в течение длительного времени, сохраняя при этом натуральную форму, и частично (по мере износа) включаются в стоимость производимого продукта. Простое воспроизводство (восстановление) ОПФ происходит за счет амортизационных отчислений, расширенное воспроизводство – за счет капитальных вложений.

В результате функционирования экономики в течение некоторого периода времени все отрасли материального производства (промышленность, сельское хозяйство, строительство, транспорт) создают *валовой внутренний продукт* (ВВП). При анализе экономических систем ВВП обычно измеряется за год. ВВП может выражаться в натурально-вещественной или в стоимостной форме.

ВВП натурально-вещественной форме включает в себя

- средства труда,
- предметы потребления.

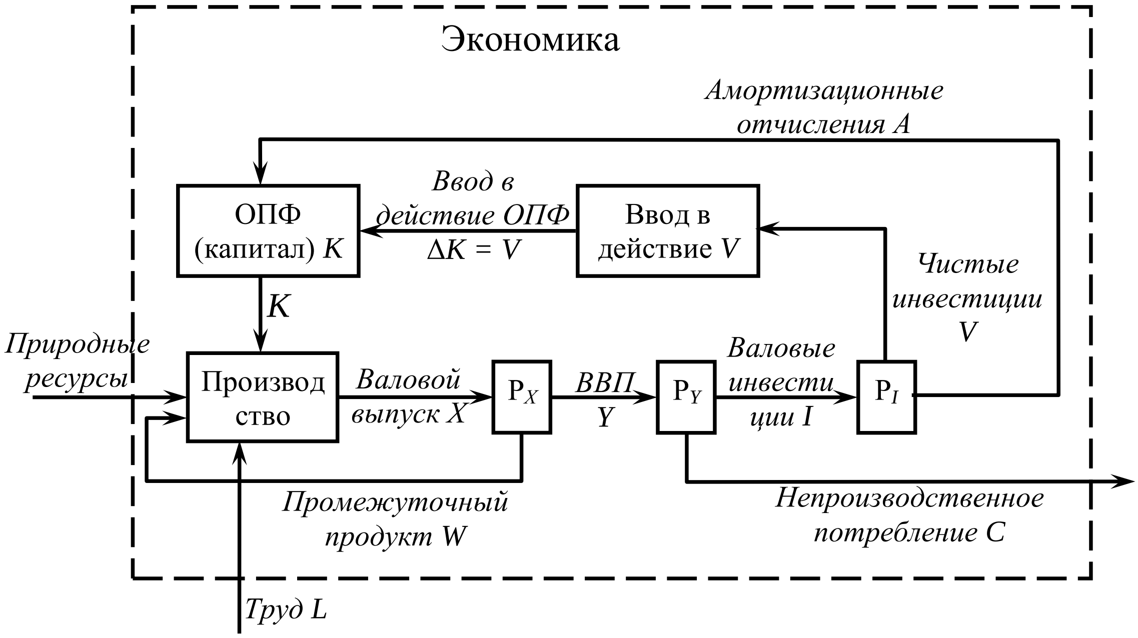
ВВП в стоимостной форме включает

- фонд возмещения выбытия основных фондов (амортизационный фонд),
- вновь созданную стоимость (национальный доход).

В процессе производства ВВП экономика создает и потребляет *промежуточный продукт*. Промежуточный продукт включает в себя предметы труда, используемые для текущего производственного потребления. Стоимость промежуточного продукта целиком переходит в стоимость средств труда или предметов потребления, включенных в ВВП.

Наряду с основным расчетным показателем – ВВП – используется вспомогательный показатель – *валовой выпуск*. Валовой выпуск (в стоимостной форме) – это суммарная стоимость ВВП и промежуточного продукта. При расчете валового выпуска стоимость предметов труда учитывается дважды: в стоимости промежуточного продукта и ВВП.

Общая схема взаимодействия основных производственных факторов показана на рис. 1.3 [1, 4].



$X = W + Y$

Рисунок 1.3. Схема взаимодействия основных производственных факторов.

Специализация производства приводит к тому, что первичные природные ресурсы или вторичные ресурсы могут претерпевать несколько преобразований в промежуточный продукт, прежде чем стать частью предмета потребления или средства труда. Пример таких преобразований показан на рис. 1.4.

Замечание. Следует отметить, что четкой границы между промежуточным продуктом и предметами потребления не существует. Так, например, цемент, закупленный строительным предприятием, является промежуточным продуктом, в то время как такой же цемент, проданный конечным потребителям (населению), является предметом потребления.

К нематериальным ресурсам относятся финансы и профессионально-интеллектуальный потенциал общества. Финансовые потоки в экономической системе идут «навстречу» материальным потокам. Основная функция финансово-кредитной подсистемы состоит в регулировании финансовых потоков и обеспечении стабильного обмена товарами и услугами как между хозяйственными единицами и их объединениями, так и между отдельными членами общества, а также в создании финансовых условий для развития производства. Более подробно функционирование финансово-кредитной подсистемы будет рассмотрено в разделе 7.2.

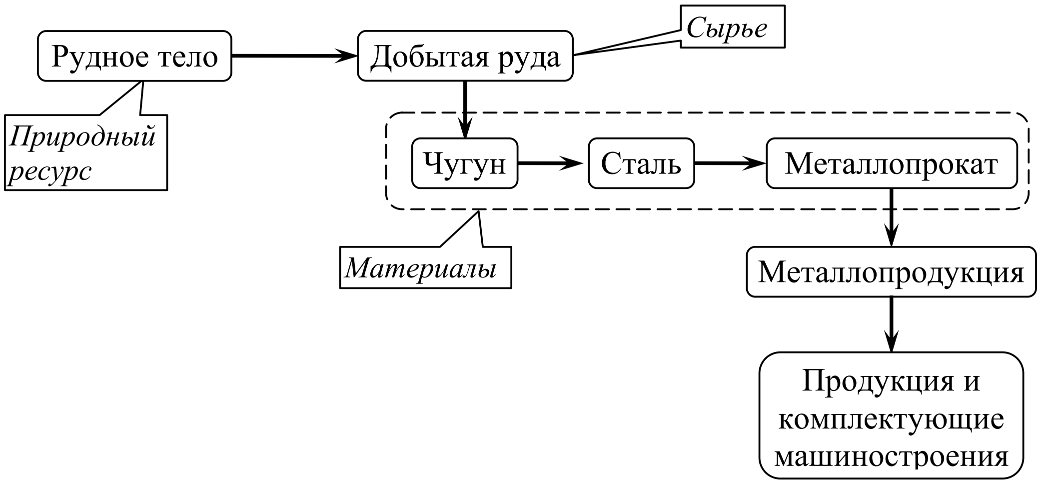


Рисунок 1.4. Пример преобразований ресурса в процессе производства.

Производственно-технологическая структура экономической системы.

Основа экономической системы – это *производственные ячейки* (промышленные и сельскохозяйственные предприятия, шахты, электростанции и т. п.). Каждая производственная ячейка имеет средства труда, позволяющие реализовать один или несколько производственных процессов. Производственный процесс преобразует предметы труда в продукты труда. Продукты труда – это предметы труда для другого производственного процесса или другой производственной ячейки, средства труда либо предметы потребления.

Производственные ячейки представляют собой самостоятельные хозяйственные единицы, обладающие правом юридических лиц, функционирующие за счет собственных средств и относительно самостоятельно распоряжающиеся своими ресурсами и произведенной продукцией.

Производственные ячейки и производственно-технологические связи между ними образуют *производственно-технологическую структуру* экономической системы. Эта структура может быть представлена ориентированным графом, узлы которого моделируют производственные ячейки, входящие в узел дуги – поставки средств производства (предметов и средств труда) из других производственных ячеек, выходящие из узла дуги – поставки продуктов труда, произведенных в данной производственной ячейке.

Организационно-хозяйственная структура экономической системы.

Организационно-хозяйственная структура экономической системы – это совокупность хозяйственных единиц и организационно-хозяйственных связей между ними. В отличие от производственно-технологических связей, которые являются горизонтальными, организационно-хозяйственные связи вертикальны. Организационно-хозяйственную структуру можно представить с помощью многоуровневой структуры, которая является надстройкой над производственно-технологической структурой [1]:

- первый уровень – органы управления хозяйственных единиц и прямые вертикальные связи каждого органа управления со своей хозяйственной единицей;
- второй уровень – органы управления объединений хозяйственных единиц и вертикальные связи этих органов с органами управления соответствующих хозяйственных единиц;
- третий уровень – центральные органы управления экономической системой и вертикальные связи этих органов с органами управления первого и второго уровней.

Моделирование экономических систем на макро- и микро-уровне.

Системное исследование экономики методом математического моделирования может быть выполнено на макро- или микро-уровне.

Макромодели представляют функционирование и развитие всей экономической системы или ее достаточно крупных подсистем. К крупным подсистемам можно отнести, например, производственные отрасли, межотраслевые производственные комплексы (пример – топливно-энергетический комплекс). В макромоделях хозяйственные единицы считаются неделимыми.

Микромодели представляют функционирование хозяйственных единиц и их объединений. В микромоделях хозяйственная единица может рассматриваться как система.

В следующих разделах будут рассмотрены как макромодели, так и микромодели экономических систем.

2. Статические модели макроэкономики

2.1 Производственные функции

При описании производственной подсистемы экономики с помощью производственных функций используется модель типа «черный ящик»: производственная подсистема рассматривается как целостная неструктурированная единица, на вход которой поступают ресурсы R_1, R_2, … R_n, а на выходе – результаты функционирования подсистемы в виде годовых объемов производства различных видов продукции X_1, X_2, … X_m (см. рис. 2.1).

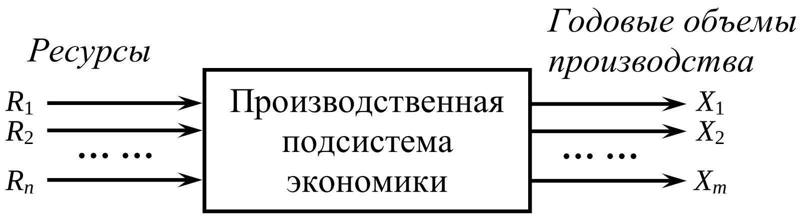


Рисунок 2.1. Производственная подсистема экономики как «черный ящик».

Производственная функция (ПФ) характеризует зависимость результатов производства от затрат ресурсов. Производственные функции могут быть определены для экономических систем различных масштабов – от производственных участков до мировой экономики. Аппарат производственных функций позволяет оценить эффективность функционирования данной производственной системы и эффективность использования отдельных производственных факторов, оценить возможности и последствия замещения одних факторов другими, определить влияние масштаба производства на его эффективность и т. д. В данном разделе будут рассмотрены макроэкономические ПФ.

На макро-уровне в качестве агрегированного результата производства удобно рассматривать валовой выпуск, ВВП или национальный доход. Во всех случаях этот результат называют выпуском и обозначают X. Поэтому на макро-уровне ПФ – это математически выраженная зависимость между объемами R_1, R_2, … R_n ресурсов, затраченных на производство (факторов производства), и объемом выпуска X: $X = F(R_1, R_2, \ldots, R_n)$.

В качестве ресурсов (факторов производства) на макро-уровне чаще всего рассматриваются накопленный (прошлый) труд – капитал K, и настоящий (живой) труд L. Накопленный труд сохраняется в форме производственных (основных и оборотных) и непроизводственных фондов, поэтому фактор K называют *фондами*. Выбор того или иного состава этого фактора обосновывается целью исследования и характером развития и взаимодействия производственной и непроизводственной сфер экономики в рассматриваемый период. Например, если доля вновь созданной стоимости, вкладываемой в непроизводственную сферу, и степень влияния непроизводственной сферы на производство примерно постоянны, то в факторе K можно напрямую учитывать только производственные фонды. Если соотношение между основными и оборотными производственными фондами примерно постоянно в течение изучаемого периода, то достаточно напрямую учитывать только ОПФ.

Природные ресурсы также являются факторами производства, но, если их количество не меняется на рассматриваемом промежутке времени, то нет оснований включать их в модель в качестве входных переменных.

Таким образом, на макро-уровне производственная подсистема экономики описывается моделью в форме производственной функции вида

$$X = F(K, L), \tag{2.1}$$

т. е. зависимостью (в общем случае, нелинейной) объема выпуска от объемов затрат ресурсов (фондов и труда). Если параметры ПФ не зависят от времени, то такая модель является статической.

Неоклассические производственные функции.

ПФ вида (2.1) называется *неоклассической*, если она является гладкой[1] и удовлетворяет следующим условиям [1]:

---

[1] Функция называется *гладкой порядка r* в области Ω, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до порядка *r* включительно. Если порядок гладкости не указан, то обычно он предполагается достаточным для того, чтобы имели смысл все действия, выполняемые над функцией в ходе текущих рассуждений

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$

при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0$

при увеличении затрат ресурсов выпуск возрастает;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$

при увеличении затрат одного из ресурсов и постоянном количестве другого скорость роста выпуска уменьшается;

4) $F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = +\infty$

при неограниченном увеличении затрат одного из ресурсов выпуск неограниченно растет.

Условие 3 означает вогнутость ПФ. Это свойство математически выражает закон убывания предельной эффективности производства при увеличении затрат факторов.

Показатели эффективности использования факторов производства.

Один из наиболее важных вопросов, возникающих при изучении производственных систем, – вопрос об эффективности преобразования факторов производства в продукт. Более эффективная система производит большее количество продукта при заданных затратах факторов производства в единицу времени. По известной ПФ можно определить ряд числовых показателей эффективности производственной системы, описываемой данной ПФ. Далее рассмотрим основные из этих показателей.

Средней производительностью по каждому ресурсу (фактору) называется отношение объема выпуска к общей величине затрат данного ресурса. Экономический смысл этого показателя – средний объем выпуска на единицу затрат данного ресурса.

В частности, для ПФ вида (2.1) рассматриваются показатели:

$\frac{F(K, L)}{K}$ – *средняя фондоотдача,*

$$\frac{F(K,L)}{L} \text{ – } \textit{средняя производительность труда.}$$

Предельным продуктом или *предельной* (*маржинальной*) *производительностью* по каждому ресурсу (фактору) или *предельной эффективностью* фактора называется частная производная выпуска по соответствующему фактору. В частности, для ПФ вида (2.1) определяются показатели:

$\dfrac{\partial F}{\partial K}$ – *предельная фондоотдача* (*предельная эффективность фондов*),

$\dfrac{\partial F}{\partial L}$ – *предельная производительность труда* (*предельная эффективность труда*).

Экономический смысл этих показателей вытекает из определения частных производных: при небольших значениях ΔK и ΔL

$$\frac{\partial F}{\partial K} \approx \frac{F(K+\Delta K, L) - F(K,L)}{\Delta K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} \approx \frac{F(K, L+\Delta L) - F(K,L)}{\Delta L},$$

поэтому предельная производительность показывает приближенную величину изменения выпуска при изменении затрат данного ресурса на единицу.

Эластичностью выпуска по каждому ресурсу называется отношение предельного продукта к среднему продукту по данному ресурсу. Для ПФ (2.1):

$$\varepsilon_K = \frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{F}{K}} = \frac{\frac{\partial F}{F}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln K} \text{ – } \textit{эластичность выпуска по фондам};$$

$$\varepsilon_L = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{F}{L}} = \frac{\frac{\partial F}{F}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln L} \text{ – } \textit{эластичность выпуска по труду}.$$

Экономический смысл этого показателя состоит в следующем: эластичность выпуска по каждому ресурсу показывает приближенную величину изменения выпуска в процентах при изменении затрат данного ресурса на один процент.

Если известны коэффициенты эластичности по каждому ресурсу, то можно прогнозировать величину изменения выпуска при одновременном изменении затрат ресурсов. Покажем это. Из определения имеем:

$$\varepsilon_K = \frac{K}{F(K,L)} \cdot \frac{\partial F}{\partial K}, \quad \varepsilon_L = \frac{L}{F(K,L)} \cdot \frac{\partial F}{\partial L}.$$

Используя разложение функции (2.1) в ряд Тейлора,

$$F(K+\Delta K, L+\Delta L) = F(K,L) + \frac{\partial F}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial F}{\partial L}\Delta L + \ldots$$

получим:

$$\Delta F \approx \frac{\partial F}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial F}{\partial L}\Delta L = \varepsilon_K \cdot \frac{F}{K}\Delta K + \varepsilon_L \cdot \frac{F}{L}\Delta L.$$

Пример [5]. Производственная система производит 150 единиц продукта при затратах 50 единиц фондов и 10 единиц труда. Коэффициенты эластичности по фондам и труду равны, соответственно, 0,25 и 0,75. Найдем количество продукта, который будет производиться при затратах 49 единиц фондов и 11 единиц труда.

Приращения затрат ресурсов составляют

$$\Delta K = 49 - 50 = -1, \quad \Delta L = 11 - 10 = 1.$$

Средние продукты равны

$$\frac{F(K,L)}{K} = \frac{150}{50} = 3, \quad \frac{F(K,L)}{L} = \frac{150}{10} = 15.$$

Тогда продукт, произведенный при затратах ресурсов (49, 11) приближенно равен

$$F(K+\Delta K,\ L+\Delta L) = F(K,L) + \Delta F \approx F(K,L) + \varepsilon_K \cdot \frac{F}{K}\Delta K + \varepsilon_L \cdot \frac{F}{L}\Delta L =$$
$$= 150 + 0{,}25 \cdot 3 \cdot (-1) + 0{,}75 \cdot 15 \cdot 1 = 160{,}5.$$

Рассмотрение примера закончено.

Если экономическая система описывается ПФ (2.1), то величина

$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L$ называется *полной эластичностью* или *эластичностью производства*.

Мультипликативная производственная функция.

Мультипликативная ПФ (МПФ) определяется следующим образом:

$$X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}, \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \tag{2.2}$$

где параметр A называется коэффициентом нейтрального технического прогресса (при фиксированных значениях α_1, α_2 выпуск в точке (K, L) тем больше, чем больше A), параметры α_1 и α_2, как будет показано далее, – это коэффициенты эластичности по фондам и труду соответственно.

Примером МПФ может случить ПФ валового выпуска Российской Федерации (в млрд. руб.), аргументами которой являются стоимость ОПФ (в млрд. руб.) и число занятых в народном хозяйстве (в млн. чел.) по данным 1960 – 1994 гг. [1]:

$$X = 0{,}931 \cdot K^{0{,}539} \cdot L^{0{,}594}.$$

При построении этой модели все стоимостные показатели учитывались в сопоставимых ценах.

Значения параметров МПФ определяются путем обработки статистических данных – временного ряда выпусков и затрат ресурсов $(X_t, K_t, L_t),\quad t = 1, 2, \ldots, T$. При этом предполагается, что

$$X_t = \delta_t \cdot A \cdot K_t^{\alpha_1} \cdot L_t^{\alpha_2},$$

где δ_t – корректировочный случайный коэффициент, отражающий отклонение расчетного выпуска от фактических значений, вызванное действием различных факторов, не учитываемых в модели; $M(\delta_t) = 1$. После логарифмирования получается модель множественной линейной регрессии:

$$\ln X_t = \ln\left(A \cdot K_t^{\alpha_1} \cdot L_t^{\alpha_2}\right) = \ln A + \alpha_1 \ln K_t + \alpha_2 \ln L_t + \varepsilon_t,$$

где $\varepsilon_t = \ln \delta_t,\quad M(\varepsilon_t) = 0$. Для определения значений параметров A, α_1 и α_2 используется метод наименьших квадратов.

Изучение свойств МПФ начнем с установления, является ли эта функция неоклассической. Для получения ответа на этот вопрос достаточно проверить выполнение условий 1) – 4).

Выполнение условий 1) и 4) для функции (2.2) очевидно:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0; \; F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = +\infty.$$

Проверим выполнение условия 2).

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \cdot A \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 X}{K} > 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 > 0;$$

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2 \cdot A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2 - 1} = \frac{\alpha_2 X}{L} > 0 \quad \text{при} \quad \alpha_2 > 0.$$

Условие 2) выполнено.

Проверим выполнение условия 3).

$$\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) \cdot A \cdot K^{\alpha_1 - 2} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{X}{K^2} < 0 \quad \text{при} \quad 0 < \alpha_1 < 1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial L^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1) \cdot A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2 - 2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{X}{L^2} < 0 \quad \text{при} \quad 0 < \alpha_2 < 1.$$

Условие 3) выполнено.

Таким образом, установлено, что МПФ является неоклассической. Следует отметить, что в процессе рассуждений также установлены следующие свойства МПФ:

- предельная фондоотдача пропорциональна средней фондоотдаче $\frac{X}{K}$ с коэффициентом α_1;
- предельная производительность труда пропорциональна средней производительности труда $\frac{X}{L}$ с коэффициентом α_2;
- при $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ предельные эффективности факторов ниже средних; это является следствием вогнутости МПФ (условие 3).

Найдем коэффициенты эластичности выпуска по каждому ресурсу.

$$\ln X = \ln\left(A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}\right) = \ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L,$$

поэтому

$$\varepsilon_K = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K} = \alpha_1$$ – эластичность выпуска по фондам,

$$\varepsilon_L = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L} = \alpha_2$$ – эластичность выпуска по труду.

При $\alpha_1 > \alpha_2$ имеет место трудосберегающий (интенсивный) рост; при $\alpha_1 < \alpha_2$ – фондосберегающий (экстенсивный) рост.

Пример. Рассмотрим МПФ валового выпуска Российской Федерации по данным 1960 – 1994 гг. [1]: $X = 0{,}931 \cdot K^{0{,}539} \cdot L^{0{,}594}$.

$\alpha_1 = 0{,}539$ – эластичность выпуска по ОПФ. При увеличении ОПФ на 1% валовой выпуск увеличится на 0,539%.

$\alpha_2 = 0{,}594$ – эластичность выпуска по труду. При увеличении числа занятых на 1% валовой выпуск увеличится на 0,594%.

Анализ функционирования производственной системы на основе темповой записи МПФ

Пусть производственная система описывается МПФ (2.2). Найдем темп роста выпуска:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \frac{A \cdot K_{t+1}^{\alpha_1} \cdot L_{t+1}^{\alpha_2}}{A \cdot K_t^{\alpha_1} \cdot L_t^{\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2},$$

где X_t, K_t и L_t – объемы выпуска и затрат фондов и труда в год t.

Возведем обе части равенства в степень $\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Отметим, что выражение в правой части полученного равенства – это средневзвешенное геометрическое темпов роста затрат ресурсов. Если затраты ресурсов увеличиваются: $K_{t+1} > K_t$, $L_{t+1} > L_t$, то

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2} > 1,$$

т. е. выпуск также увеличивается; при этом при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

при $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} < \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}.$$

Это означает, что при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ темп роста выпуска больше, чем средний темп роста факторов, а при $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ – меньше.

Таким образом, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ МПФ описывает растущую экономику.

Производственная функция Кобба-Дугласа.

ПФ Кобба-Дугласа определяется уравнением

$$X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \qquad \alpha > 0. \qquad (2.3)$$

Легко видеть, что эта функция является частным случаем МПФ при $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$.

ПФ Кобба-Дугласа предложена П. Дугласом и Ч. Коббом в 1928 г. Она была получена путем статистического исследования зависимости физического объема продукции от размера основного капитала и количества человеко-часов, отработанных рабочими и служащими США за период 1899 – 1922 гг.

Предельные нормы замены ресурсов.

Изоквантой называется линия (поверхность) уровня ПФ. Для ПФ вида (2.1) изокванта – это линия уровня функции $F(K, L)$, т. е. множество точек плоскости, для которых

$$F(K, L) = X_0 = const.$$

Для МПФ уравнение изокванты имеет вид

$$A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} = X_0 = const$$

или

$$K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A} L^{-\alpha_2}.$$

Изокванты, более удаленные от точки (0, 0) (точки бездействия), характеризуются более высокими уровнями выпуска продукции.

Для различных точек (K, L), лежащих на одной изокванте, значение выпуска равно одной и той же величине X_0, что означает взаимозаменяемость ресурсов. Зная уравнение ПФ, можно получить количественные оценки.

Для точек (K, L), лежащих на одной изокванте, $F(K, L) = const$, поэтому

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0. \qquad (2.4)$$

Для неоклассической ПФ $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$ и $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$, следовательно, dK и dL имеют разные знаки: при $dL < 0$ (сокращении затрат труда) имеет место $dK > 0$, т. е. выбывший в объеме $|dL|$ труд замещается фондами в объеме dK.

Из (2.4):

$$S_K = \frac{dK}{|dL|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial L}}{\dfrac{\partial F}{\partial K}}.$$

Величина S_K называется *предельной нормой замены труда фондами*. Экономический смысл этого показателя – количество единиц фондов, необходимое для замены одной единицы труда при сохранении заданного объема выпуска.

Аналогично, величина

$$S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial K}}{\dfrac{\partial F}{\partial L}}$$

называется *предельной нормой замены фондов трудом*.

Ясно, что $S_K \cdot S_L = 1$.

Для МПФ (2.2)

$$S_K = \frac{\alpha_2 \cdot A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2 - 1}}{\alpha_1 \cdot A \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot k,$$

норма замены труда фондами пропорциональна фондовооруженности $k = \dfrac{K}{L}$.

Изоклиналями называются линии наибольшего роста ПФ. Т. к. направление наибольшего роста функции задается ее градиентом, то для ПФ вида (2.1) это направление определяется вектором $gradF = \left(\dfrac{\partial F}{\partial K}, \dfrac{\partial F}{\partial L} \right)$. Отсюда следует, что уравнение изоклинали имеет вид

$$\frac{dK}{\dfrac{\partial F}{\partial K}} = \frac{dL}{\dfrac{\partial F}{\partial L}}.$$

С геометрической точки зрения это означает ортогональность изоквант (линий нулевого роста) и изоклиналей в точке их пересечения.

Для МПФ (2.2) изоклинали определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dK}{\alpha_1 \cdot A \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2}} = \frac{dL}{\alpha_2 \cdot A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2 - 1}}$$

или $$\alpha_2 K\, dK = \alpha_1 L\, dL.$$

Это уравнение с разделенными переменными. После интегрирования обеих частей получим:

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + C},$$

где C – произвольная постоянная. Если изоклиналь проходит через точку (K_0, L_0), то $C = K_0^2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$.

На рис. 2.1 схематично изображены изокванты и изоклинали МПФ.

Изокванты показаны сплошными линиями, изоклинали – пунктирными.

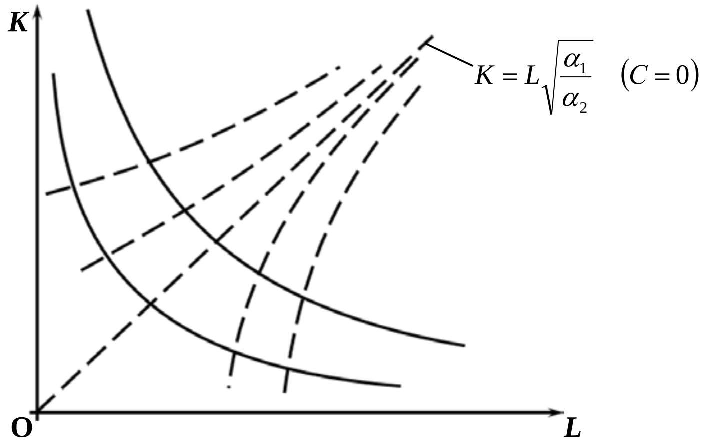


Рисунок 2.1. Изокванты и изоклинали мультипликативной производственной функции.

Оценка масштаба и эффективности производства на основе производственных функций.

При изучении характера роста выпуска обычно выделяют две группы факторов:

- *экстенсивные факторы* роста (рост за счет увеличения затрат ресурсов, т. е. увеличения масштаба производства);
- *интенсивные факторы* роста (рост за счет повышения эффективности использования ресурсов).

Выполнять оценку масштаба и эффективности производства удобно, если выпуск и затраты ресурсов представлены в сопоставимых единицах (например, в соизмеримой стоимостной форме). Но в этом случае возникает проблема соизмерения настоящего и прошлого труда, которая до настоящего времени не решена окончательно. Для преодоления указанного затруднения можно использовать следующий прием. Приведем все величины к относительным (безразмерным) показателям. Это можно сделать путем нормирования. Например, МПФ (2.2) в безразмерных показателях запишется следующим образом:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2}, \tag{2.5}$$

где X_0, K_0 и L_0 – объемы выпуска и затрат фондов и труда в базовый год.

Обозначим: $\tilde{X} = \dfrac{X}{X_0}$, $\tilde{K} = \dfrac{K}{K_0}$, $\tilde{L} = \dfrac{L}{L_0}$, тогда (2.5) запишется в виде:

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \cdot \tilde{L}^{\alpha_2}.$$

Т. к. эффективность производства – это отношение результатов производства к затратам ресурсов, то для МПФ имеем два частных показателя эффективности:

$E_K = \dfrac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ – фондоотдача,

$E_L = \dfrac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ – производительность труда.

Оба показателя являются безразмерными (измеряются в шкале отношений), поэтому с ними можно выполнять любые операции усреднения. Для мультипликативной ПФ естественно использовать нахождение средневзвешенного геометрического частных показателей. Поэтому обобщенный показатель эффективности производства имеет вид:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \qquad (2.6)$$

где $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $1 - \alpha = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ – относительные эластичности (веса). Отметим, что частные показатели эффективности входят в обобщенный показатель с теми же приоритетами, с какими входят в формулу ПФ соответствующие им ресурсы.

Масштаб производства характеризуется объемом затраченных ресурсов. С учетом соображений, использованных ранее при выводе обобщенного показателя эффективности, аналогично получим показатель масштаба производства (средний объем использованных ресурсов):

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \qquad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) следует

$$\tilde{X} = E \cdot M.$$

<u>Замечание</u>. Из равенства (2.5) легко выразить X: $X = \dfrac{X_0}{K_0^{\alpha_1} \cdot L_0^{\alpha_2}} \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$.

Сопоставляя полученное выражение с (2.2), можно получить естественную интерпретацию коэффициента $A = \dfrac{X_0}{K_0^{\alpha_1} \cdot L_0^{\alpha_2}}$: это коэффициент, который соизмеряет затраты ресурсов с выпуском.

<u>Пример</u>. Рассмотрим МПФ валового выпуска Российской Федерации по данным 1960 – 1994 гг. [1]: $X = 0{,}931 \cdot K^{0{,}539} \cdot L^{0{,}594}$. Известно, что за период с 1960 по 1988 гг.

- валовой выпуск (в сопоставимых ценах) в млрд. руб. вырос в 4,08 раза;
- стоимость ОПФ возросла в 6,62 раза;
- число занятых увеличилось в 1,79 раза.

Определим масштаб и эффективность производства.

Используя исходные данные, получим: $\tilde{X} = 4{,}08$; $\tilde{K} = 6{,}62$; $\tilde{L} = 1{,}79$.

Относительные эластичности по фондам и труду равны

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}539}{0{,}539 + 0{,}594} \approx 0{,}476;$$

$$1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}594}{0{,}539 + 0{,}594} \approx 0{,}524.$$

Найдем частные показатели эффективности по каждому ресурсу

$$E_K = \frac{\tilde{X}}{\tilde{K}} = \frac{4{,}08}{6{,}62} \approx 0{,}616; \quad E_L = \frac{\tilde{X}}{\tilde{L}} = \frac{4{,}08}{1{,}79} \approx 2{,}279.$$

Тогда обобщенный показатель эффективности производства равен

$$E = E_K^{\alpha} \cdot E_L^{1-\alpha} = (0{,}616)^{0{,}476} \cdot (2{,}279)^{0{,}524} \approx 1{,}22.$$

Определяем масштаб производства:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha} = (6{,}62)^{0{,}476} \cdot (1{,}79)^{0{,}524} \approx 3{,}336.$$

Вывод: общий рост валового продукта с 1960 по 1988 гг. в 4,08 раза обусловлен увеличением эффективности производства в 1,22 раза и ростом масштаба производства в 3,34 раза

2.2 Статическая модель межотраслевого баланса

Балансовые модели предназначены для анализа и планирования производства и распределения продукции на различных уровнях: от отдельного предприятия до национальной экономики. Анализируя историю функционирования различных экономических систем, можно заключить, что экономические кризисы в различных государствах от перепроизводства (США, середина XX в.) до дефицита (СССР, конец XX в.) были связаны с нарушением баланса между производством и потреблением.

Цель балансового анализа – получение ответа на вопрос: каким должен быть объем производства каждой из отраслей [2] (предприятий, подразделений), чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли. При этом каждая отрасль с одной стороны, является производителем некоторой продукции; а с другой – потребителем продукции как своей, так и произведенной другими отраслями.

Наиболее полная балансовая модель была построена в 1936 г. американским экономистом В. Леонтьевым [3]. Эта модель позволяет определить баланс между несколькими взаимодействующими отраслями. Она может быть использована также для определения баланса между взаимодействующими предприятиями или между подразделениями одного предприятия (цехами одного завода). В настоящее время межотраслевые модели используются в экономической практике более 80 стран мира для организации рационального управления производственным сектором

---

[2] В *отрасль* выделяются производственные единицы, однородные по используемому сырью, выпускаемой продукции и применяемым технологиям [1].

[3] В. В. Леонтьев покинул СССР в 1925 г. Занимался экономическими исследованиями в Германии, в 1928 г. переехал в Китай, в 1931 г. – в США. В 1973 г. В. В. Леонтьеву была присуждена Нобелевская премия в области экономики «за развитие метода «затраты-выпуск» и его применение к важным экономическим проблемам». Модель «затраты-выпуск», разработанная В. В. Леонтьевым, в отечественной литературе называется статической моделью межотраслевого баланса (СММБ).

национальной экономики.

Далее рассматривается статическая модель межотраслевого баланса В. В. Леонтьева (СММБ).

Базовые предположения СММБ.

Статическая модель межотраслевого баланса построена на основе следующих предположений.

1) В экономической системе производятся, потребляются и инвестируются n продуктов. В соответствии с этим, производственный сектор системы разделен на n отраслей.
2) Каждая отрасль является «чистой», т. е. производит только один продукт; совместное производство продуктов исключается. Различные отрасли выпускают разные продукты.

Замечание. Чем больше n (т. е. чем мельче расчленение на отрасли), тем более адекватно модель межотраслевого баланса будет описывать реальную экономическую систему. В работах В. Леонтьева отмечается, что для практического применения должно быть $n = 500 \div 600$ (хотя на момент создания СММБ реальные расчеты с такими значениями n были невозможны из-за отсутствия вычислительной техники). В настоящее время в Японии используются модели с $n = 2000$ [5].

Перед формулировкой третьего основного предположения сделаем некоторые пояснения. Под *производственным процессом* в каждой отрасли понимается преобразование некоторых (возможно, всех) типов продуктов в определенный продукт. Обозначим:

x_i – валовой выпуск отрасли i;

x_{ij} – объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства.

В. Леонтьев, изучая развитие американской экономики в период, предшествовавший II мировой войне, обратил внимание на то, что величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются постоянными в течение ряда лет. Это объясняется примерным постоянством используемых технологий. На основании этого формулируется следующее основное допущение.

3) Для выпуска любого объема x_j продукции отрасли j необходимы затраты продукции отрасли i, в количестве $a_{ij} \cdot x_j$, где a_{ij} – постоянный коэффициент. Проще говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции.

В литературе по экономико-математическому моделированию предположение 3 называется также гипотезой о линейности существующей технологии. Таким образом, в соответствии с гипотезой линейности,

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Коэффициенты a_{ij} в равенствах (2.8) называются *технологическими коэффициентами* или *коэффициентами прямых материальных затрат*.

Из экономического смысла величин x_i и x_{ij} вытекает их неотрицательность, а из этого, в свою очередь, следует неотрицательность коэффициентов a_{ij}.

Соотношения баланса.

Валовой выпуск x_i i-го продукта (i-й отрасли) распределяется на

- *производственное потребление* во всех отраслях;
- *конечное* (*непроизводственное*) *потребление*.

Обозначим:

y_i – объем продукции отрасли i, предназначенный для непроизводственного потребления (конечное потребление, экспорт, инвестиции).

Тогда, с учетом базовых предположений,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.9}$$

откуда, в соответствии с гипотезой линейности,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Уравнения (2.9) называются *соотношениями баланса*. Система уравнений (2.10) представляет собой *статическую модель межотраслевого баланса* (СММБ) в скалярной записи.

Введем обозначения:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{ *вектор валового выпуска*, } x_i \geq 0;$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{ *вектор конечного спроса*, } y_i \geq 0;$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{ *матрица прямых затрат* (*технологическая матрица*), } a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Тогда система уравнений (2.10) может быть записана в матричной форме:

$$\bar{x} = A \cdot \bar{x} + \bar{y}. \qquad (2.11)$$

Уравнение (2.11) также представляет СММБ (в матричной или структурной форме).

Все величины в уравнениях (2.8) – (2.11) могут измеряться в натуральных или стоимостных единицах измерений. В соответствии с этим различают *натуральный* или *стоимостной* межотраслевые балансы.

В случае стоимостного выражения из (2.8) следует: $x_{ij} = a_{ij}$ при $x_j = 1$ (ден. ед.). Следовательно, экономический смысл коэффициента a_{ij} – это стоимость продукции отрасли i, необходимой для производства продукции отрасли j на 1 ден. ед. (имеется в виду валовой выпуск отрасли j).

Замечание. Из последнего рассуждения видно, что стоимостной подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями. При этом подходе даже необязательно рассматривать «чистые» (однопродуктовые) отрасли, т. к. в случае многопродуктовых отраслей также можно говорить о стоимостном вкладе одной отрасли в выпуск продукции другой отрасли на 1 ден. ед. Вместе с тем, планирование исключительно в стоимостных величинах может привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

Уравнения СММБ могут быть использованы для целей планирования. Для предстоящего планового периода задается вектор конечного спроса $\bar{y}$, после чего необходимо получить ответы на два вопроса:

1) какой вектор валового выпуска $\bar{x}$ обеспечит, с одной стороны, удовлетворение заданного конечного спроса, а с другой стороны, – функционирование самого производственного сектора;
2) каковы должны быть межотраслевые поставки x_{ij}, чтобы был обеспечен процесс производства валового выпуска $\bar{x}$.

Таким образом, сущность метода Леонтьева состоит в определении валового выпуска отраслей и межотраслевых потоков по заданному конечному спросу на основе данных о технологических возможностях, воплощенных в коэффициентах a_{ij}.

Для получения ответов на поставленные вопросы следует разрешить систему уравнений (2.10) относительно неизвестных x_1, x_2, …, x_n (в матричной форме – уравнение (2.11) относительно неизвестного вектора $\bar{x}$). При этом необходимо учитывать, что все компоненты вектора $\bar{x}$ должны быть неотрицательными.

Продуктивность модели Леонтьева.

Существование неотрицательного вектора $\bar{x}$, удовлетворяющего равенству (2.11) при заданном векторе $\bar{y}$, очевидно, зависит от свойств матрицы A.

Матрица $A \geq 0$[4] называется *продуктивной*, если для любого вектора $\bar{y} \geq 0$ существует $\bar{x} \geq 0$ – решение уравнения (2.11). В этом случае и

[4] Здесь и далее запись $A \geq 0$ означает, что все элементы матрицы A неотрицательны.

модель Леонтьева, определяемая матрицей A, также называется *продуктивной*.

Продуктивность модели означает, что для любого вектора конечного спроса $\bar{y} \geq 0$ можно определить вектор валового выпуска $\bar{x} \geq 0$, обеспечивающий этот $\bar{y}$.

Можно установить, что для продуктивности матрицы A достаточно существование решения $\bar{x} \geq 0$ уравнения (2.11) хотя бы для одного вектора $\bar{y} > 0$.

<u>Теорема (первый критерий продуктивности)</u>. Если $A \geq 0$ и для некоторого вектора $\bar{y}^* > 0$ уравнение (2.11) имеет решение $\bar{x}^* \geq 0$, то матрица A является продуктивной.

<u>Замечание</u>. При выполнении условия теоремы на самом деле $\bar{x}^* > 0$.

Уравнение (2.11) может быть записано в виде:

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y},$$

где E – единичная матрица. Это означает, что для существования какого-либо вектора $\bar{x}$, удовлетворяющего (2.11), необходимо и достаточно существование матрицы $(E - A)^{-1}$. Следующая теорема дает более эффективное условие продуктивности, чем первый критерий.

<u>Теорема (второй критерий продуктивности)</u>. Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Для получения еще одного критерия продуктивности сначала сформулируем вспомогательное утверждение.

<u>Лемма</u>. Если ряд из матриц

$$E + A + A^2 + \ldots \tag{2.12}$$

сходится, то его сумма есть матрица $(E - A)^{-1}$.

<u>Теорема (третий критерий продуктивности)</u>. Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда сходится ряд (2.12).

Этот критерий в ряде случаев очень удобно использовать для проверки матрицы на продуктивность. Например, легко показать, что если сумма элементов любого столбца неотрицательной матрицы A меньше 1, то эта матрица продуктивна. Обозначим:

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$ – сумма элементов j-го столбца матрицы A,

$$q = \max_{1 \le j \le n} q_j$$ – наибольшая из таких сумм; по предположению, $q < 1$.

Тогда все элементы матрицы A не превосходят q (с учетом неотрицательности A). По правилу перемножения матриц элемент матрицы A^2, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен

$$a_{i1} \cdot a_{1j} + a_{i2} \cdot a_{2j} + \ \dots \ + a_{in} \cdot a_{nj} \ \le \ q\left(a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}\right) \le \ q^2, \quad i,\ j = 1, 2,\ \dots,\ n,$$

т. е. все элементы матрицы A^2 не превосходят q^2.

Аналогично, все элементы матрицы A^3 не превосходят q^3 и т. д. Отсюда следует сходимость ряда (2.12), а, следовательно, и продуктивность A.

Пример. В таблицах 2.1 и 2.2 представлены технологические коэффициенты (в стоимостном выражении) крупных отраслей производственных секторов экономики СССР и Японии [5].

Таблица 2.1

Технологические коэффициенты крупных отраслей производственного сектора экономики СССР в 1972 г.

	Тяжелая промышленность	Легкая промышленность	Сельское и лесное хозяйство
Тяжелая промышленность	0,4339	0,0397	0,1145
Легкая промышленность	0,0185	0,3166	0,0396
Сельское и лесное хозяйство	0,0088	0,2586	0,2020

Таблица 2.2

Технологические коэффициенты крупных отраслей производственного сектора экономики Японии в 1980 г.

	Тяжелая промышленность	Легкая промышленность	Сельское и лесное и рыбное хозяйство
Тяжелая промышленность	0,2311	0,0433	0,1158
Легкая промышленность	0,0980	0,4529	0,0683
Сельское и лесное и рыбное хозяйство	0,1645	0,0004	0,1078

Экономическую интерпретацию этих коэффициентов дадим на примере коэффициента a_{12}. В таблице 2.1 a_{12} = 0,0397. Это означает, что в СССР в 1972 г. для выпуска продукции легкой промышленности на 1 руб. необходимо было использовать продукцию тяжелой промышленности стоимостью 0,0397 руб. Аналогичный показатель для Японии составлял в 1980 г. 0,0433 (см. таблицу 2.2).

Легко видеть, что в обеих технологических матрицах сумма элементов каждого столбца строго меньше 1. Поэтому можно утверждать, что технологические матрицы, представленные в таблицах 2.1 и 2.2, продуктивны.

Замечание. Таблицы 2.1 и 2.2 содержат агрегированные коэффициенты прямых материальных затрат. Например, СММБ производственного сектора экономики СССР 1972 г. включала 112 отраслей. Все эти отрасли были агрегированы в три крупные отрасли, представленные в таблице 2.1.

Коэффициенты полных материальных затрат.

Пусть $A \geq 0$ – продуктивная матрица. Решение уравнения (2.11) может быть записано в виде

$$\overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{y},$$

а, с учетом леммы,

$$\overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{y} = (E + A + A^2 + \ldots)\overline{y} = \overline{y} + A\overline{y} + A^2\overline{y} + \ldots$$

Экономический смысл этого равенства состоит в следующем. Для получения вектора валового выпуска $\bar{x}$, обеспечивающего конечный спрос $\bar{y}$, необходимо

- произвести комбинацию товаров, описываемую вектором $\bar{y}$ (затраты 0-го порядка),
- для получения $\bar{y}$ – затратить (а значит, сначала произвести) продукцию, описываемую вектором $A\bar{y}$ (затраты 1-го порядка),
- для получения $A\bar{y}$ – затратить (а значит, сначала произвести) продукцию, описываемую вектором $A(A\bar{y}) = A^2\bar{y}$ (затраты 2-го порядка),
- и т. д.

Валовой выпуск $\bar{x}$ представляет собой сумму затрат 0-го, 1-го, 2-го и т. д. порядков.

<u>Пример</u> (упрощенный) [6]. Рассмотрим блок из трех промышленных отраслей: металлургия, производство электроэнергии, добыча угля. Для получения вектора конечного спроса $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ необходимо произвести

- y_1 ед. металла,
- y_2 ед. электроэнергии,
- y_3 ед. угля.

Для производства y_1 тонн металла необходимо затратить (а, следовательно, сначала произвести)

- y_{11} ед. металла,
- y_{12} ед. электроэнергии,
- y_{13} ед. угля.

То же – в отношении производства y_2 ед. электроэнергии и y_3 ед. угля. И т. д. (см. рис. 2.2).

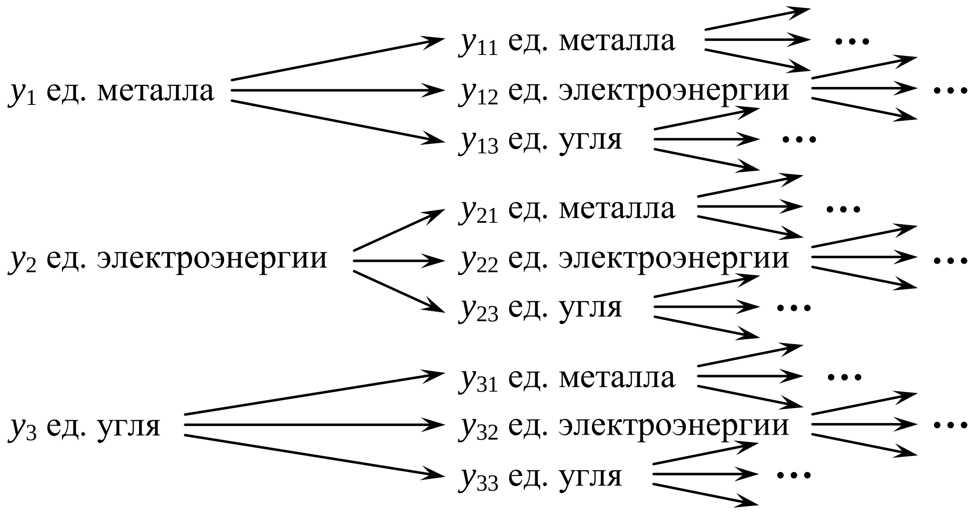


Рисунок 2.2. Пример формирования затрат 0-го, 1-го, 2-го и т. д. порядков.

Сумма

$$\overline{y} + A\overline{y} + A^2\overline{y} + \ \dots$$

называется *вектором полных затрат*; матрица

$$B \ = \ (E - A)^{-1}$$

называется *матрицей полных затрат* или *мультипликатором Леонтьева*, равенство

$$\overline{x} \ = \ B\overline{y} \qquad (2.13)$$

называют приведенной формой СММБ.

В соответствии с (2.13), балансовое соотношение может быть сформулировано так: вектор валового выпуска $\overline{x}$ совпадает с вектором полных затрат.

Равенство (2.13), фактически, дает способ определения вектора валового выпуска $\overline{x}$, обеспечивающего удовлетворение заданного конечного спроса. Таким образом, получен ответ на первый из поставленных выше вопросов. Зная вектор $\overline{x}$, можно получить ответ и на второй вопрос (о межотраслевых поставках). В соответствии с (2.8),

$$x_{ij} \ = \ a_{ij} \cdot x_j\,, \quad i,\ j = 1,\, 2,\ \dots,\, n.$$

Величины x_{ij} определяют межотраслевые поставки, обеспечивающие валовой выпуск $\overline{x}$. Сформируем матрицу X:

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица X называется *матрицей межотраслевых поставок* (*потоков*).

Вернемся к рассмотрению матрицы полных затрат B. Элементы этой матрицы b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат*. Заметим, что при фиксированном значении j и векторе конечного спроса $y_1=0,\ \ldots,\ y_{j-1}=0,\ y_j=1,\ y_{j+1}=0,\ \ldots,\ y_n=0$ получим

$$x_i = b_{ij},\quad i=1,2,\ \ldots,n.$$

Отсюда вытекает экономический смысл коэффициентов полных затрат: величина b_{ij} – это стоимость валовой продукции отрасли i, необходимой для выпуска <u>конечной</u> продукции отрасли j на 1 ден. ед. Отличие от коэффициентов прямых затрат в том, что речь идет не о валовом выпуске, а о конечной продукции отрасли j.

<u>Пример</u>. Рассмотрим агрегированные технологические коэффициенты (в стоимостном выражении) отраслей производственного сектора экономики СССР, представленные в таблице 2.1.

Матрица прямых затрат, построенная по данным таблицы 2.1, имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}4339 & 0{,}0397 & 0{,}1145 \\ 0{,}0185 & 0{,}3166 & 0{,}0396 \\ 0{,}0088 & 0{,}2586 & 0{,}2020 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $E-A$ равна

$$E-A=\begin{pmatrix} 0{,}5661 & -0{,}0397 & -0{,}1145 \\ -0{,}0185 & 0{,}6834 & -0{,}0396 \\ -0{,}0088 & -0{,}2586 & 0{,}7980 \end{pmatrix},$$

и матрица полных затрат имеет вид

$$B = (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}7772 & 0{,}2036 & 0{,}2651 \\ 0{,}0502 & 1{,}4970 & 0{,}0815 \\ 0{,}0359 & 0{,}4874 & 1{,}2825 \end{pmatrix}.$$

Экономическую интерпретацию коэффициентов полных затрат дадим на примере b_{12}. Величина $b_{12} = 0{,}2036$ означает, что в СССР в 1972 г. для выпуска <u>конечной</u> продукции легкой промышленности на 1 руб. необходимо было использовать продукцию тяжелой промышленности стоимостью 0,2036 руб. Для сравнения: как уже отмечалось ранее при рассмотрении таблицы 2.1, для обеспечения <u>валового выпуска</u> легкой промышленности на 1 руб. требовалось использование продукции тяжелой промышленности стоимостью 0,0397 руб.

Сопоставление коэффициентов прямых и полных затрат показывает, что полные затраты заметно больше прямых. Например, $\frac{b_{12}}{a_{12}} \approx 5{,}13$.

Если задать значения конечного спроса y_1, y_2, y_3, то можно определить значения валового выпуска отраслей, обеспечивающие y_1, y_2, y_3:

$$\bar{x} = (E-A)^{-1}\bar{y} = \begin{pmatrix} 1{,}7772 & 0{,}2036 & 0{,}2651 \\ 0{,}0502 & 1{,}4970 & 0{,}0815 \\ 0{,}0359 & 0{,}4874 & 1{,}2825 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}7772y_1 + 0{,}2036y_2 + 0{,}2651y_3, \\ x_2 &= 0{,}0502y_1 + 1{,}4970y_2 + 0{,}0815y_3, \\ x_3 &= 0{,}0359y_1 + 0{,}4874y_2 + 1{,}2825y_3. \end{aligned}$$

На основании полученных результатов можно рассчитать матрицу межотраслевых поставок, обеспечивающих валовой выпуск $\bar{x}$:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad i,\ j = 1, 2, 3.$$

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}4349x_1 & 0{,}0397x_2 & 0{,}1145x_3 \\ 0{,}0185x_1 & 0{,}3166x_2 & 0{,}0396x_3 \\ 0{,}0088x_1 & 0{,}2586x_2 & 0{,}2020x_3 \end{pmatrix}.$$

Добавленная стоимость.

Рассмотрим матрицу межотраслевых поставок *X*. Столбец с номером *j* этой матрицы представляет собой затраты отраслей производственного сектора на валовой выпуск x_j отрасли *j*. Очевидно, что x_j больше суммы этих затрат:

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Величина z_j, определяемая в соответствии с (2.14), называется *добавленной стоимостью* (или *вновь созданной стоимостью*) отрасли *j*. Она включает в себя оплату труда работающих в отрасли *j*, амортизационные отчисления и прибыль этой отрасли.

Разделим обе части (2.14) на x_j:

$$\frac{z_j}{x_j} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij}}{x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

и введем обозначение $v_j = \dfrac{z_j}{x_j}$. Тогда

$$v_j = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Величина v_j называется *нормой добавленной стоимости отрасли* *j*. Она характеризует долю добавленной стоимости в каждой единице (в стоимостном выражении) продукции отрасли *j*.

Пример. Рассмотрим агрегированные технологические коэффициенты (в стоимостном выражении) отраслей производственного сектора экономики СССР, представленные в таблице 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4339 & 0{,}0397 & 0{,}1145 \\ 0{,}0185 & 0{,}3166 & 0{,}0396 \\ 0{,}0088 & 0{,}2586 & 0{,}2020 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (2.15),

$$v_1 = 1 - (0{,}4339 + 0{,}0185 + 0{,}0088) = 0{,}5388;$$

$$v_2 = 1 - (0{,}0397 + 0{,}3166 + 0{,}2586) = 0{,}3851;$$

$$v_3 = 1 - (0{,}1145 + 0{,}0396 + 0{,}2020) = 0{,}6439.$$

Это означает, что в каждом рубле продукции тяжелой промышленности СССР в 1972 г. добавленная стоимость составляла 54 коп.; для легкой промышленности и сельского и лесного хозяйства эти величины составляли, соответственно, 39 и 64 коп.

СММБ в натуральном выражении.

До сих пор рассматривалась СММБ, в которой все величины имели стоимостное выражение. От нее можно перейти к СММБ в натуральном выражении, в которой векторы конечного спроса и валового выпуска заданы в натуральных (физических) показателях. Обозначим:

$*\overline{x}$ – вектор валового выпуска в натуральном выражении,

$*\overline{y}$ – вектор конечного спроса в натуральном выражении,

$\overline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$ – вектор цен,

p_i – цена единицы продукции i-й отрасли.

Очевидно, что

$$x_i = p_i \cdot *x_i\,, \quad y_i = p_i \cdot *y_i\,. \tag{2.16}$$

Сформируем матрицу цен:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения (2.16) можно записать в матричной форме:

$$\overline{x} = P \cdot *\overline{x}\,, \quad \overline{y} = P \cdot *\overline{y}\,.$$

Подставим эти соотношения в (2.11):

$$P \cdot *\overline{x} = A \cdot P \cdot *\overline{x} + P \cdot *\overline{y}\,.$$

Умножим обе части на матрицу P^{-1} и используем свойства операции умножения матриц:

$$*\overline{x} \;=\; P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot *\overline{x}+*\overline{y}\,.$$

Обозначим $*A \;=\; P^{-1}\cdot A\cdot P$ – матрица технологических коэффициентов в натуральном выражении. Получим СММБ в натуральном выражении:

$$*\overline{x} \;=\; *A\cdot *\overline{x}+*\overline{y}\,. \tag{2.17}$$

Заметим, что элементы технологических матриц в стоимостном и натуральном выражении связаны соотношениями

$$*a_{ij} \;=\; p_i^{-1}\cdot p_j\cdot a_{ij}\,,\quad i,\, j=1,2,\;\ldots,n.$$

Аналогично можно получить приведенную форму СММБ в натуральном выражении:

$$*\overline{x} \;=\; *B\cdot *\overline{y}\,, \tag{2.18}$$

где $*B \;=\; P^{-1}\cdot B\cdot P$ – матрица полных затрат в натуральном выражении.

Баланс цен.

Вернемся к соотношению (2.15). Представим технологические коэффициенты в натуральном выражении:

$$v_j \;=\; 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_j}\cdot *a_{ij}\,,\qquad j=1,2,\;\ldots,\;n.$$

Умножим обе части равенства на p_j, получим:

$$*v_j \;=\; p_j-\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot *a_{ij}\,,\qquad j=1,2,\;\ldots,\;n, \tag{2.19}$$

где $*v_j \;=\; p_j\cdot v_j$ – величина добавленной стоимости, приходящаяся на единицу (в натуральном выражении) продукции отрасли j; имеет размерность цены продукции отрасли j.

В матричной форме:

$$*\overline{v} \;=\; \left(E-*A^T\right)\cdot\overline{p}\,. \tag{2.20}$$

Соотношения (2.19) и (2.20) называются *балансом цен* (или *уравнением равновесных цен*).

<u>Замечание</u>. Баланс цен (2.19) является следствием баланса затрат (2.14)

и наоборот.

Пусть вектор $*\overline{v}$ известен, а вектор $\overline{p}$ подлежит определению. Из (2.20)

$$\overline{p} \;=\; \left(E - *A^T\right)^{-1} \cdot *\overline{v} \;=\; *\,B^T \cdot *\overline{v}\,. \qquad (2.21)$$

Равенство (2.21) называют *приведенной формой модели равновесных цен*, а матрицу $*B^T$ – мультипликатором ценового эффекта распространения.

Модели (2.21) и (2.18) называются двойственными. Двойственными называются также и структурные формы этих моделей.

Если матрица полных затрат задана в стоимостном выражении, то, с учетом $*B = P^{-1} \cdot B \cdot P$ и $*v_j = p_j \cdot v_j$, равенство (2.20) может быть записано в виде

$$\overline{p} \;=\; P \cdot B^T \cdot \overline{v}\,, \qquad (2.21)$$

где $\overline{v} \;=\; P^{-1} \cdot *\overline{v}$.

Таким образом, модель равновесных цен позволяет

- прогнозировать цены на продукцию отраслей по известным величинам норм добавленной стоимости;
- прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей;
- проводить корректировку равновесных цен на продукцию отраслей, обусловленную изменениями добавленных стоимостей.

Пусть вектор $\overline{v}$ изменился на величину $\Delta\overline{v}$. Тогда вектор $\overline{p}$ должен измениться на величину $\Delta\overline{p}$, причем, в соответствии с (2.21),

$$\Delta\overline{p} \;=\; P \cdot B^T \cdot \Delta\overline{v}\,.$$

<u>Пример</u>. Рассмотрим агрегированные технологические коэффициенты (в стоимостном выражении) отраслей производственного сектора экономики СССР, представленные в таблице 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4339 & 0{,}0397 & 0{,}1145 \\ 0{,}0185 & 0{,}3166 & 0{,}0396 \\ 0{,}0088 & 0{,}2586 & 0{,}2020 \end{pmatrix}.$$

Пусть известно, что вектор добавленных стоимостей $\overline{v}$ изменился на величину $\Delta\overline{v}$. Требуется определить, насколько необходимо изменить имеющиеся равновесные цены $\overline{p} = (p_1,\, p_2,\, p_3)^T$, чтобы новые цены $\overline{p} + \Delta\overline{p}$ опять стали равновесными (т. е. удовлетворяли балансу цен (2.19)).

Матрица полных затрат уже была найдена в предыдущем примере, поэтому воспользуемся полученным ранее результатом:

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}7772 & 0{,}2036 & 0{,}2651 \\ 0{,}0502 & 1{,}4970 & 0{,}0815 \\ 0{,}0359 & 0{,}4874 & 1{,}2825 \end{pmatrix},$$

тогда

$$B^T = \begin{pmatrix} 1{,}7772 & 0{,}0502 & 0{,}0359 \\ 0{,}2036 & 1{,}4970 & 0{,}4874 \\ 0{,}2651 & 0{,}0815 & 1{,}2825 \end{pmatrix}.$$

Получим:

$$\Delta\overline{p} = P \cdot B^T \cdot \Delta\overline{v} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}7772 & 0{,}0502 & 0{,}0359 \\ 0{,}2036 & 1{,}4970 & 0{,}4874 \\ 0{,}2651 & 0{,}0815 & 1{,}2825 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= p_1(1{,}7772 \cdot \Delta v_1 + 0{,}0502 \cdot \Delta v_2 + 0{,}0359 \cdot \Delta v_3), \\ \Delta p_2 &= p_2(0{,}2036 \cdot \Delta v_1 + 1{,}4970 \cdot \Delta v_2 + 0{,}4874 \cdot \Delta v_3), \\ \Delta p_3 &= p_3(0{,}2651 \cdot \Delta v_1 + 0{,}0815 \cdot \Delta v_2 + 1{,}2825 \cdot \Delta v_3). \end{aligned}$$

Баланс трудовых ресурсов.

Затраты труда на производство отдельных видов продукции и общее количество затрат труда в экономике – факторы, определяющие валовые выпуски отраслей. Поэтому включение этих факторов в СММБ повысит адекватность данной модели. Единицами количества труда являются человеко-час, человеко-день, человеко-год.

Обозначим L_j – количество труда, затрачиваемого в отрасли j на выпуск продукции этой отрасли в объеме x_j.

Величина

$$l_j = \frac{L_j}{x_j},$$

равная количеству труда, затрачиваемого в отрасли j при выпуске единицы (в стоимостном выражении) ее продукции, называется *коэффициентом прямых затрат труда* в отрасли j.

Коэффициенты l_j, как и технологические коэффициенты a_{ij}, оцениваются путем обработки статистической информации. Вектор $\bar{l} = (l_1 \quad l_2 \quad \ldots \quad l_n)^T$ называется *вектором прямых затрат труда*.

Обозначим:

$L(\bar{x})$ – общее количество труда, которое требуется затратить в производственном секторе для обеспечения валового выпуска $\bar{x}$,

L_y – количество труда, затрачиваемого в непроизводственном секторе экономики,

L – общее количество труда в экономике.

Очевидно, что

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} l_j \cdot x_j = \bar{l}^T \cdot \bar{x}, \tag{2.22}$$

$$L = L(\bar{x}) + L_y. \tag{2.23}$$

Равенство (2.23) называется *агрегированным балансом труда*.

<u>Замечание</u>. Как видно из (2.22), величина $L(\bar{x})$, а также все значения L_j зависят от валового выпуска $\bar{x}$, и, следовательно, являются функциями вектора $\bar{y}$. Т. е. $L(\bar{x})$ и все L_j – эндогенные переменные (подлежат определению). В то же время L_y является экзогенной (входной) переменной.

Добавим уравнение баланса труда (2.23) к СММБ (2.11). С учетом (2.22) получим модель

$$
\begin{cases}
\bar{x} \;=\; A\bar{x} + \bar{y}, \\
L \;=\; \bar{l}^{T} \cdot \bar{x} + L_y ,
\end{cases}
\tag{2.24}
$$

которая называется *СММБ, расширенной балансом труда* (в структурной форме). От нее можно перейти к приведенной форме:

$$
\begin{cases}
\bar{x} \;=\; B \cdot \bar{y}, \\
L \;=\; \bar{l}^{T} \cdot B \cdot \bar{y} + L_y .
\end{cases}
\tag{2.25}
$$

Из уравнений (2.25) определяются величины $\bar{x}$, X, L_j, $L(\bar{x})$ и L.

Величины, входящие в расширенную СММБ (2.24), размещаются в *таблицах межотраслевого баланса*.

Таблицы межотраслевого баланса.

Экзогенные переменные $\bar{y}$ и L_y, а также эндогенные величины $\bar{x}$, X, z_j, L_j и L принято представлять в так называемых таблицах межотраслевого баланса (ТМБ). Общий вид ТМБ показан в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Таблица межотраслевого баланса.

		Отрасли как потребители				Конечный спрос $\bar{y}$	Валовой выпуск $\bar{x}$
		1	2	…	n		
Отрасли как производители	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
	…	…	…	…	…	…	…
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Добавленная стоимость		z_1	z_2	…	z_n		
Валовой выпуск $\bar{x}$		x_1	x_2	…	x_n		
Труд		L_1	L_2	…	L_n	L_y	L

Табличная форма наглядно воспроизводит качественную и количественную структуру межотраслевых взаимосвязей. Например, строка, соответствующая отрасли i, отражает соотношения (2.8), столбец, соответствующий отрасли j, – соотношения (2.14); агрегированный баланс труда отражается в нижней строке таблицы.

<u>Пример</u>. Рассмотрим фрагмент 8-отраслевой таблицы межотраслевого баланса экономики США 1958 г. (таблица 2.4). Величины x_i, x_{ij}, z_i, y_i выражены в млн. долларов; величины L_j, L_y, L – в человеко-годах.

Таблица 2.4

Фрагмент 8-отраслевой таблицы межотраслевого баланса экономики США 1958 г.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Отрасли как потребители</td><td rowspan="2">Конечный спрос $\bar{y}$</td><td rowspan="2">Валовой выпуск $\bar{x}$</td></tr>
<tr><td>1. Продукты питания и лекарства</td><td>2. Ткани, одежда, мебель</td><td>…</td><td>8. Химические продукты</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Отрасли как производители</td><td>1. Продукты питания и лекарства</td><td>15,202</td><td>0,547</td><td>…</td><td>0,386</td><td>58,728</td><td>76,272</td></tr>
<tr><td>2. Ткани, одежда, мебель</td><td>0,347</td><td>12,815</td><td>…</td><td>0,061</td><td>21,369</td><td>36,500</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>8. Химические продукты</td><td>1,956</td><td>1,030</td><td>…</td><td>2,500</td><td>3,218</td><td>11,770</td></tr>
<tr><td colspan="2">Добавленная стоимость</td><td>53,625</td><td>20,390</td><td>…</td><td>6,894</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Валовой выпуск</td><td>76,272</td><td>36,500</td><td>…</td><td>11,770</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Труд</td><td>8,180</td><td>3,929</td><td>…</td><td>0,671</td><td>26,430</td><td>57,146</td></tr>
</table>

По данным таблицы 2.4 можно определить:

$$l_1 = \frac{L_1}{x_1} = \frac{8{,}180}{76{,}272} \approx 0{,}1073; \quad l_2 = \frac{L_2}{x_2} = \frac{3{,}929}{36{,}500} \approx 0{,}1076;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$l_8 = \frac{L_8}{x_8} = \frac{0{,}671}{11{,}770} \approx 0{,}0570.$$

Экономическую интерпретацию данных таблицы 2.4, дадим на примере отрасли «химические продукты». Величина l_8 = 0,0570 – это количество человеко-лет труда, необходимое данной отрасли для выпуска ее продукции на 1 млн. долларов. Величина L_8 = 0,671 – это количество человеко-лет труда, необходимое отрасли для выпуска ее продукции на x_8 = 11,770 млн. долларов.

Замечание. Если ресурсы труда L ограничены, то уже нельзя ставить вопрос об удовлетворении любого конечного спроса, а только такого, для которого хватит трудовых ресурсов:

$$\begin{cases} \bar{x} = B \cdot \bar{y}, \\ L \geq \bar{l}^T \cdot B \cdot \bar{y} + L_y . \end{cases}$$

Если структура конечного спроса задана, то модель может быть представлена в форме оптимизационной задачи. Более подробную информацию на эту тему можно получить, например, в [5].

Коэффициенты полных затрат труда.

Представим первое слагаемое в правой части второго уравнения (2.25) в виде

$$L(\bar{x}) = \bar{l}^T \cdot B \cdot \bar{y} = \bar{m}^T \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i ,$$

где $$\bar{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_n \end{pmatrix} = B^T \cdot \bar{l} .$$

Компоненты вектора $\bar{m}$ (величины m_j, j = 1, 2, …, n) называются *коэффициентами полных затрат труда* в производственном секторе экономики. Заметим, что при фиксированном значении j и векторе конечного спроса $y_1 = 0, \ \ldots, \ y_{j-1} = 0, y_j = 1, y_{j+1} = 0, \ \ldots, \ y_n = 0$ получим

$$L(\bar{x}) = m_j , \quad j = 1, 2, \ \ldots, \ n.$$

Отсюда вытекает экономический смысл коэффициентов полных затрат труда: величина m_j – это количество труда всего производственного сектора экономики (не только отрасли j!), необходимое для выпуска конечной продукции отрасли j на 1 ден. ед.

Задания для самостоятельного выполнения

***Задание* 1.**

Известна производственная функция ВВП США, найденная по данным 1960 – 1995 гг.: $X = 2{,}248 \cdot K^{0{,}404} \cdot L^{0{,}803}$ [1].

1. Определить следующие показатели:
   1.1) средние и предельные производительности по каждому ресурсу;
   1.2) эластичность по каждому ресурсу и эластичность производства.

   Дать экономическую интерпретацию всем указанным характеристикам.
2. Дать ответы на вопросы: является ли экономика растущей; если да, то является ли рост интенсивным (трудосберегающим) или экстенсивным (фондосберегающим). Ответы обосновать.
3. Определить предельные нормы замены труда фондами и замены фондов трудом. Дать экономическую интерпретацию.
4. Известно, что ВВП США, измеренный в млрд. долларов в ценах 1987 г., вырос с 1960 по 1995 г. в 2,82 раза; основные производственные фонды за этот же период увеличились в 2,88 раза, а число занятых – в 1,93 раза. Оценить масштаб и эффективность производства.

***Задание* 2.**

Провести исследование линейной ПФ $X = a \cdot K + b \cdot L$. В ходе исследования выполнить следующие действия.

1. Определить средние и предельные производительности по каждому ресурсу; эластичность по каждому ресурсу и эластичность производства. Дать экономическую интерпретацию.
2. Определить является ли функция неоклассической. Ответ обосновать. Дать экономическую интерпретацию по каждому проверяемому свойству.
3. Составить уравнения изоквант и изоклиналей. Построить иллюстрацию: изокванты для 4 – 5 значений уровня выпуска и 4 – 5 изоклиналей.
4. Определить предельные нормы замены ресурсов. Дать экономическую

интерпретацию.

***Задание* 3**.

Производственный сектор экономики разделен на 8 отраслей. Технологические коэффициенты, заданные в стоимостном выражении, представлены в матрице A:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1993 & 0{,}01499 & 0{,}00758 & 0{,}00655 & 0{,}00740 & 0{,}00586 & 0{,}00541 & 0{,}03280 \\ 0{,}00455 & 0{,}3511 & 0{,}00433 & 0{,}01523 & 0{,}01098 & 0{,}00607 & 0{,}00156 & 0{,}00518 \\ 0{,}00564 & 0{,}00589 & 0{,}1093 & 0{,}03823 & 0{,}02016 & 0{,}02090 & 0{,}01007 & 0{,}01699 \\ 0{,}00476 & 0{,}00433 & 0{,}03843 & 0{,}2187 & 0{,}01980 & 0{,}01722 & 0{,}00454 & 0{,}00450 \\ 0{,}01518 & 0{,}00597 & 0{,}00542 & 0{,}00571 & 0{,}000693 & 0{,}01009 & 0{,}03821 & 0{,}00595 \\ 0{,}01354 & 0{,}01301 & 0{,}1447 & 0{,}1120 & 0{,}09335 & 0{,}2827 & 0{,}00962 & 0{,}04070 \\ 0{,}02829 & 0{,}01786 & 0{,}01747 & 0{,}01493 & 0{,}04003 & 0{,}06052 & 0{,}1708 & 0{,}09575 \\ 0{,}02565 & 0{,}02822 & 0{,}00947 & 0{,}00881 & 0{,}01758 & 0{,}01630 & 0{,}01768 & 0{,}2124 \end{pmatrix},$$

вектор конечного спроса имеет вид

$$\bar{y} = (58{,}728 \quad 21{,}369 \quad 13{,}385 \quad 38{,}691 \quad 65{,}117 \quad 2{,}244 \quad 23{,}851 \quad 3{,}218)^T.$$

Выполнить следующий анализ.

1. Показать, что матрица A является продуктивной.
2. Найти матрицу полных затрат и определить вектор валового выпуска отраслей $\bar{x}$ и матрицу межотраслевых потоков X, обеспечивающие получение заданного $\bar{y}$. Дать экономическую интерпретацию матриц A и X, матрицы полных затрат, продуктивности матрицы A.
3. Определить, как изменится вектор конечного спроса, если валовой выпуск 3-й отрасли увеличится на 20%, 5-й отрасли – увеличится на 15%, а 7-й отрасли – уменьшится на 10%.
4. Найти значения норм добавленных стоимостей v_j (в стоимостном выражении). Дать их экономическую интерпретацию.
5. Предположив, что нормы добавленных стоимостей изменятся на величину Δv_j, $j = 1, 2, \dots, 8$, получить соотношение для корректировки равновесных цен. Приняв

$$\Delta\bar{v} = (-0{,}0015 \quad 0{,}0021 \quad -0{,}0007 \quad 0{,}0002 \quad -0{,}0009 \quad 0{,}0011 \quad 0{,}0001 \quad 0{,}0005)^T,$$

определить, на сколько процентов должна измениться цена продукции каждой отрасли, чтобы новые цены опять стали равновесными.

6. Известны коэффициенты прямых затрат труда:

$$\bar{l} = (0{,}1073 \quad 0{,}1076 \quad 0{,}0857 \quad 0{,}0722 \quad 0{,}1238 \quad 0{,}0652 \quad 0{,}0440 \quad 0{,}0570)^T.$$

Найти коэффициенты полных затрат труда. Сравнить значения коэффициентов прямых и полных затрат. Дать экономическую интерпретацию этих показателей.

Задачи.

1. Производственная система производит 150 единиц продукта при затратах 50 единиц капитала и 10 единиц труда. На какую величину возрастет выпуск продукта, если затраты капитала увеличатся до 54 единиц при постоянных затратах труда? Эластичность продукта по капиталу равна 0,25.
2. Показать, что МПФ $X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$ является однородной функцией степени $\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2}$, т. е. обладает свойством:

   для любых K, L *и* $\lambda>0$ справедливо $X(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot X(K, L)$.
3. Производственная система описывается МПФ. Коэффициенты эластичности по труду и капиталу равны, соответственно, 0,7 и 0,8. Определить, во сколько раз изменится объем выпускаемой продукции, если затраты труда и капитала возрастут в 2 раза.

   Указание: использовать результат задачи 3.
4. Производственная система производила 100 единиц продукта, используя старую технологию. После перехода на новую технологию затраты труда уменьшились на 2 единицы. Известно, что предельная производительность труда равна 20 ед. продукта на ед. труда, а предельная фондоотдача составляет 10 ед. продукта на ед. капитала. Найти количество дополнительных единиц капитала, которые необходимо затратить, чтобы сохранить уровень выпуска продукции.
5. Производственная система описывается МПФ. Система производит 100 единиц продукта при затратах 40 единиц капитала и 20 единиц труда.

Коэффициенты эластичности по труду и капиталу постоянны и равны, соответственно, 0,75 и 0,25. Найти предельную норму замещения труда капиталом и оценить затраты капитала при увеличении затрат труда на 2 единицы при условии постоянства выпуска продукции.

3 Линейные динамические модели макроэкономики

В предыдущем разделе рассматривались *статические модели* экономических систем. Статические модели отражают функцию системы, фиксируя ее конкретное состояние. При этом характеристики модели не зависят от времени, время вообще как бы «не существует» в таких моделях. Например, в подразделе 2.1 рассматривалась модель производственного сектора экономики Российской Федерации в виде мультипликативной производственной функции $X = 0{,}931 \cdot K^{0{,}539} \cdot L^{0{,}594}$. Входные переменные (стоимость ОПФ K и число занятых в производстве L) в этой модели «мгновенно» преобразуются в выходную переменную X (валовой выпуск).

В отличие от статических, *динамические модели* отражают функционирование системы – процесс изменения состояний этой системы. Динамические модели описывают зависимость изменения выходных переменных от входных и от времени. Эта зависимость называется динамической характеристикой системы.

Время может рассматриваться как непрерывная или дискретная величина. В зависимости от этого различают непрерывные и дискретные динамические модели. В непрерывных моделях экономических систем математическим выражением динамической характеристики системы чаще всего являются дифференциальные уравнения. В дискретных моделях обычно используется их дискретный аналог – конечно-разностные уравнения.

3.1 Модели с дискретным временем

В моделях, представленных в данном подразделе, время рассматривается как дискретная величина. Это предположение является естественным при моделировании экономических систем. Поскольку традиционным является подведение итогов хозяйственной деятельности за год (как на макро-, так и на микро-уровне), время будет моделироваться дискретной величиной с шагом в один год. В случае необходимости перехода к более дробным единицам (квартал, месяц), такие показатели, как валовой выпуск, ВВП, инвестиции, должны быть приведены к годовым значениям.

Как уже отмечалось, математический аппарат для построения и исследования таких моделей – конечно-разностные уравнения. В приложении I приведен минимально необходимый справочный материал о конечно-разностных уравнениях. Рекомендуется изучить его перед тем, как приступить к знакомству с предлагаемыми далее дискретными моделями.

3.1.1 Динамическая модель Кейнса

По итогам кризиса 1929 – 1934 гг. («Великой депрессии») английским экономистом Дж. М. Кейнсом был сформулирован постулат, согласно которому «предприниматели производят не столько, сколько захотят, но столько, каков спрос» [1]. Если исходить из предпосылки, что спрос будущего года формируется в текущем году, то производители будут планировать выпуск будущего года в соответствии с прогнозируемым спросом.

В рассматриваемой модели Кейнса единственной эндогенной переменной (зависящей от времени) является ВВП Y – объем производства товаров конечного пользования. ВВП включает

- фонд непроизводственного потребления C;
- валовые частные внутренние инвестиции I
  (сумма всех покупок вновь произведенных средств производства и изменений в товарно-материальных запасах предпринимателей);
- государственные расходы на закупку товаров и услуг G;
- чистый экспорт E.

В данной модели экономика предполагается закрытой, поэтому $E = 0$, а государственные расходы распределяются на потребление и накопления. Следовательно, принимается

$$Y = C + I.$$

Предположим, что спрос на инвестиционные товары постоянен, а спрос на потребительские товары в будущем году линейно зависит от ВВП текущего года:

$$C_{t+1} = \underline{C} + cY_t ,$$

где $\underline{C}$ – нижняя граница фонда непроизводственного потребления,

c – предельная склонность к потреблению,

т. е. увеличение объема потребления при увеличении дохода на единицу (доля прироста дохода, которая идет на потребительские товары), $0 < c < 1$.

Поскольку планируемый выпуск (будущего года) должен соответствовать прогнозируемому спросу, то следует приравнять эти две величины:

$$Y_{t+1} = \underline{C} + cY_t + I . \qquad (3.1)$$

Соотношение (3.1) известно как *динамическая модель Кейнса* [1].

Следует отметить, что данная модель не отражает воспроизводственный процесс (в частности, не учтено выбытие фондов в связи с физическим и моральным износом). Поэтому она может применяться только для анализа и краткосрочного прогнозирования, и непригодна для долгосрочного прогнозирования.

С математической точки зрения модель (3.1) является линейным конечно-разностным уравнением первого порядка. Запишем его в стандартной форме (I.3) (см. приложение I):

$$Y_{t+1} - cY_t = \underline{C} + I ,$$

и найдем общее решение этого уравнения. Соответствующее однородное уравнение

$$Y_{t+1} - cY_t = 0 .$$

Характеристическое уравнение

$$z - c = 0$$

имеет корень $z = c$. Поскольку в данной модели шаг по времени Т равен 1 (один год), то, в соответствии с (I.7) (см. приложение I), общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_о(t) = A \cdot c^t,$$

где A – произвольная постоянная.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_ч(t) = a.$$

После подстановки в уравнение получим:

$$a - c \cdot a = \underline{C} + I,$$

откуда $a = \dfrac{\underline{C} + I}{1 - c} = Y_E$, и общее решение уравнения (3.1):

$$Y_t = y_ч(t) + y_о(t) = Y_E + A \cdot c^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Зададим начальное условие: при $t = 0$ $Y = Y_0$ (значение ВВП в базовый год). Тогда $Y_0 = Y_E + A \cdot 1$, откуда $A = Y_0 - Y_E$.

Окончательно решение уравнения (3.1) имеет вид

$$Y_t = Y_E + (Y_0 - Y_E) \cdot c^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

где $Y_E = \dfrac{\underline{C} + I}{1 - c}$.

При $0 < c < 1$

$$\lim_{t \to \infty} Y_t = \lim_{t \to \infty} \left(Y_E + (Y_0 - Y_E) \cdot c^t \right) = Y_E + 0 = Y_E,$$

т. е. Y_E – это установившееся значение ВВП.

3.1.2 Модель Самуэльсона - Хикса

Рассмотренная выше модель Кейнса была построена на основе предположения о постоянстве инвестиций. Откажемся от этого предположения: вместо этого будем считать, что величина инвестиций включает как постоянную часть I, так и переменную часть, причем масштабы инвестирования прямо пропорциональны приросту ВВП (*принцип акселерации*). Таким образом,

$$I_{t+1} = r \cdot (Y_t - Y_{t-1}) + I, \qquad (3.2)$$

где r – коэффициент акселерации, $0 < r < 1$.

Заменив в (3.1) постоянную величину I на I_{t+1} в соответствии с (3.2), получим:

$$Y_{t+1} = \underline{C} + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) + I\,. \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) известно как *уравнение Хикса*. Это уравнение представляет собой линейное конечно-разностное уравнение второго порядка. Запишем его в стандартной форме:

$$Y_{t+2} - (r+c)Y_{t+1} + rY_t = \underline{C} + I\,.$$

Это уравнение является неоднородным, поэтому его общее решение, как и в случае уравнения (3.1), будем находить в соответствии с (I.5) (см. приложение I). Как и для уравнения (3.1), частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{ч}(t) = a.$$

После подстановки в исходное уравнение

$$a - (r+c)a + r\cdot a = \underline{C} + I$$

получим: $a = \dfrac{\underline{C} + I}{1-c} = Y_E$.

Теперь необходимо найти общее решение однородного уравнения

$$Y_{t+2} - (r+c)Y_{t+1} + rY_t = 0\,.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 - (r+c)z + r = 0\,.$$

Вид корней этого уравнения, а, значит, и вид общего решения однородного уравнения, зависит от дискриминанта характеристического уравнения $D = (r+c)^2 - 4r$.

1) Пусть $D > 0$, т. е. $\dfrac{(r+c)^2}{4} - r > 0$.

Корни характеристического уравнения равны

$$z_1 = \frac{r+c}{2} + \sqrt{\frac{(r+c)^2}{4} - r}\,, \quad z_2 = \frac{r+c}{2} - \sqrt{\frac{(r+c)^2}{4} - r}\,,$$

$z_1 > z_2$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о}}(t) = C_1 \cdot z_1^t + C_2 \cdot z_2^t ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Можно показать, что при $0 < c < 1$, $0 < r < 1$ справедливо

$$0 < z_1 < 1, \quad 0 < z_2 < 1.$$

Общее решение уравнения (3.3):

$$Y_t = y_{\text{ч}}(t) + y_{\text{о}}(t) = Y_E + C_1 \cdot z_1^t + C_2 \cdot z_2^t .$$

Зададим начальные условия: при $t = 0$ $Y = Y_0$, при $t = 1$ $Y = Y_1$.

Исходя из этих условий, составим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} Y_0 = Y_E + C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1, \\ Y_1 = Y_E + C_1 \cdot z_1 + C_2 \cdot z_2 . \end{cases}$$

Решение системы:

$$C_1 = \frac{Y_1 - Y_E - z_2(Y_0 - Y_E)}{z_1 - z_2}, \quad C_2 = \frac{z_1(Y_0 - Y_E) - (Y_1 - Y_E)}{z_1 - z_2}.$$

<u>Итог</u>: при $\dfrac{(r+c)^2}{4} - r > 0$ $\quad Y_t = Y_E + C_1 \cdot z_1^t + C_2 \cdot z_2^t$,

где $Y_E = \dfrac{C + I}{1 - c}$,

$$z_1 = \frac{r+c}{2} + \sqrt{\frac{(r+c)^2}{4} - r} , \quad z_2 = \frac{r+c}{2} - \sqrt{\frac{(r+c)^2}{4} - r} ,$$

$$C_1 = \frac{Y_1 - Y_E - z_2(Y_0 - Y_E)}{z_1 - z_2}, \quad C_2 = \frac{z_1(Y_0 - Y_E) - (Y_1 - Y_E)}{z_1 - z_2}.$$

С учетом $0 < z_1 < 1$, $0 < z_2 < 1$

$$\lim_{t \to \infty} Y_t = \lim_{t \to \infty} \left(Y_E + C_1 \cdot z_1^t + C_2 \cdot z_2^t \right) = Y_E ,$$

т. е. Y_E , как и для модели (3.1), является установившимся значением ВВП.

2) Пусть $D < 0$, т. е. $\dfrac{(r+c)^2}{4} - r < 0$.

Корни характеристического уравнения комплексные

$$z_{1,2} = \frac{r+c}{2} \pm i \cdot \sqrt{r - \frac{(r+c)^2}{4}} = \alpha \pm i \cdot \beta .$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о}}(t) \;=\; \rho^t \left(C_1 \cdot \cos(\varphi \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\varphi \cdot t)\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные,

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\frac{(r+c)^2}{4} + r - \frac{(r+c)^2}{4}} = \sqrt{r},$$

$$\varphi = arctg\,\frac{\beta}{\alpha} = arctg\,\frac{\sqrt{4r - (r+c)^2}}{r+c} = arctg\sqrt{\frac{4r}{(r+c)^2} - 1}.$$

Общее решение уравнения (3.3):

$$Y_t \;=\; y_{\text{ч}}(t) + y_{\text{о}}(t) \;=\; Y_E + r^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cdot \cos(\varphi \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\varphi \cdot t)\right).$$

Зададим начальные условия: при $t = 0$ $Y = Y_0$, при $t = 1$ $Y = Y_1$.

Исходя из этих условий, составим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} Y_0 \;=\; Y_E + C_1 \cdot 1, \\ Y_1 \;=\; Y_E + \rho\left(C_1 \cdot \cos\varphi + C_2 \cdot \sin\varphi\right), \end{cases}$$

Решение системы:

$$C_1 \;=\; Y_0 - Y_E\,,$$

$$C_2 \;=\; \frac{Y_1 - Y_E - \rho(Y_0 - Y_E)\cos\varphi}{\rho\sin\varphi} \;=\; \frac{Y_1 - Y_E}{\beta} - \frac{(Y_0 - Y_E)\alpha}{\beta}.$$

<u>Итог</u>: при $\dfrac{(r+c)^2}{4} - r \;<\; 0$

$$Y_t \;=\; Y_E + r^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cdot \cos(\varphi \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\varphi \cdot t)\right),$$

где $Y_E \;=\; \dfrac{\underline{C} + I}{1 - c}$,

$$\alpha = \frac{r+c}{2}, \quad \beta = \sqrt{r - \frac{(r+c)^2}{4}}, \quad \varphi = arctg\,\frac{\beta}{\alpha},$$

$$C_1 = Y_0 - Y_E\ , \quad C_2 = \frac{Y_1 - Y_E}{\beta} - \frac{(Y_0 - Y_E)\alpha}{\beta}\ .$$

При $0 < r < 1$

$$\lim_{t\to\infty} Y_t = \lim_{t\to\infty}\left(Y_E + r^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cdot \cos(\varphi \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\varphi \cdot t)\right)\right) = Y_E\ .$$

Это значит, что после завершения переходного затухающего гармонического процесса ВВП принимает установившееся значение Y_E.

3) Случай $D = 0$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

В заключение отметим, что модель (3.3), как и модель (3.1), может быть использована только для оперативного прогнозирования.

3.1.3 Динамическая модель межотраслевого баланса

В разделе 2.2 была рассмотрена статическая модель межотраслевого баланса (СММБ). Недостатком этой модели является то, что она не содержит экономических переменных, характеризующих ОПФ. СММБ может быть расширена путем включения новых переменных, отражающих имеющиеся ОПФ, подобно тому, как это было сделано при построении СММБ, расширенной балансом труда. Однако, в случае использования статической модели, возможна ситуация, когда с одной стороны, имеющихся фондов недостаточно для получения требуемого вектора $\overline{x}$, а с другой стороны, процесс создания дополнительных ОПФ требует длительного времени, большего, чем интервал планирования. Отсюда следует, что процесс межотраслевого планирования с учетом имеющихся ОПФ требует построения модели, отражающей процесс капитального строительства (наращивания ОПФ), причем эта модель должна быть динамической (процесс капитального строительства протекает во времени). Такая модель была построена В. Леонтьевым и называется она *динамической моделью межотраслевого баланса* (ДММБ). Далее рассматривается эта модель.

Динамическая модель межотраслевого баланса В. Леонтьева.

Обозначим:

$$\bar{x}_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ – вектор валовых выпусков в год } t,$$

$$\bar{y}_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \text{ – вектор конечного спроса в год } t,$$

$$\overline{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \cdots \\ \Phi_n(t) \end{pmatrix}$$ – вектор ОПФ в стоимостном выражении: $\Phi_j(t)$ – количество ОПФ, используемое при выпуске x_j ед. продукции отрасли j в год t.

Источником капитального строительства может быть только конечный продукт $\bar{y}_t$ отраслей производственного сектора. Это соображение требует разложения вектора $\bar{y}_t$ на два слагаемых:

$$\bar{y}_t = \bar{I}_t + \overline{C}_t, \tag{3.4}$$

где $\bar{I}_t$ – вектор инвестиций (источник капитального строительства),

$\overline{C}_t$ – вектор потребления и непроизводственного накопления.

Обозначим:

$\Delta\bar{x}_t = \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t$ – прирост валовых выпусков,

$\Delta\overline{\Phi}_t = \overline{\Phi}_{t+1} - \overline{\Phi}_t$ – прирост ОПФ на промежутке времени $[t,\ t+1]$.

Предположим, что связь между векторами $\Delta\overline{\Phi}_t$ и $\bar{I}_t$ линейная:

$$\bar{I}_t = D \cdot \Delta\overline{\Phi}_t, \tag{3.5}$$

или, в развернутой форме,

$$I_i(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \cdot \overline{\Delta\Phi}_j(t), \quad i = 1, 2, \ \ldots, \ n,$$

где D – квадратная матрица порядка n. Экономический смысл элементов этой матрицы определяется из следующих соображений. Зададим в последнем равенстве

$$\Delta\Phi_1(t)=0,\ \ldots,\ \Delta\Phi_{j-1}(t)=0,\ \Delta\Phi_j(t)=1,\ \Delta\Phi_{j+1}(t)=0,\ \ldots,\ \Delta\Phi_n(t)=0,$$

получим $I_i(t)=d_{ij}$. Это означает, что коэффициент d_{ij} равен количеству единиц продукции отрасли i, необходимой для увеличения на 1 единицу (в стоимостном выражении) фонда отрасли j. Поэтому коэффициенты d_{ij} называются *коэффициентами капиталоемкости приростов ОПФ*.

Коэффициентом прямой фондоемкости (*капиталоемкости*) отрасли j называется величина

$$f_j = \frac{\Phi_j}{x_j}, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Она равна количеству ОПФ отрасли j, затрачиваемых при выпуске единицы (в стоимостном выражении) продукции этой отрасли.

Обозначим:

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов прямых фондоемкостей.

Тогда справедливо

$$\mathrm{f}\cdot\Delta\bar{x}_t = \Delta\bar{\Phi}_t.$$

Объединяя последнее соотношение с (3.5), получим:

$$\bar{I}_t = D\cdot\mathrm{f}\cdot\Delta\bar{x}_t = K\cdot\Delta\bar{x}_t\,, \qquad (3.6)$$

где $K = D\cdot\mathrm{f}$ – матрица *коэффициентов капитальных затрат* (*капитальных коэффициентов*). Капитальный коэффициент k_{ij} представляет собой созданный в отрасли i основной капитал (в стоимостном выражении), используемый отраслью j при выпуске единицы ее продукции.

Пример. В таблице 3.1 приведены коэффициенты капитальных затрат отрасли «Компьютеры» в трех отраслях экономики США (по В. Леонтьеву) в 1977 г. [5] (в ценах 1979 г.). Коэффициенты k_{ij} имеют размерность (доллар продукции «Компьютеры»)/(доллар увеличения продукции соответствующих отраслей).

Таблица 3.1

Коэффициенты капитальных затрат отрасли «Компьютеры» в трех отраслях экономики США

i \ j	73. Финансы	74. Страхование	77. Деловые услуги
50. Компьютеры	$k_{50,73} = 0{,}081$	$k_{50,74} = 0{,}084$	$k_{50,77} = 0{,}037$

Коэффициенты k_{ij}, как и коэффициенты a_{ij} в СММБ, определяются эмпирическим путем, причем процесс их нахождения является весьма трудоемким.

Из соотношений (3.6) и (3.4):

$$\overline{y}_t = \overline{I}_t + \overline{C}_t = K \cdot \Delta\overline{x}_t + \overline{C}_t .$$

Подставим правую часть последнего равенства в статическое уравнение межотраслевого баланса (2.11):

$$\overline{x}_t - A \cdot \overline{x}_t - K \cdot \Delta\overline{x}_t = \overline{C}_t . \qquad (3.7)$$

Равенство (3.7) представляет собой *структурную форму ДММБ* В. Леонтьева. В уравнении (3.7) векторы $\overline{x}_t$ и $\overline{C}_t$ являются экзогенными переменными (заданы при $t = 0$ – в базовый год), вектор $\Delta\overline{x}_t$ является эндогенной переменной (подлежит определению). Поскольку модель содержит экзогенные переменные, то ее называют еще *открытым динамическим балансом Леонтьева с дискретным временем*.

Добавим к модели (3.7) полученные ранее соотношения и равенство $\Delta\overline{y}_t = (E - A) \cdot \Delta\overline{x}_t$, вытекающее из (2.11):

$$\begin{cases} \overline{x}_t - A \cdot \overline{x}_t - K \cdot \Delta\overline{x}_t = \overline{C}_t , \\ K \cdot \Delta\overline{x}_t = \overline{I}_t , \\ \mathrm{f} \cdot \Delta\overline{x}_t = \Delta\overline{\Phi}_t , \\ \overline{I}_t + \overline{C}_t = \overline{y}_t , \\ (E - A) \cdot \Delta\overline{x}_t = \Delta\overline{y}_t . \end{cases} \qquad (3.8)$$

Система уравнений (3.8) представляет собой *полную структурную* *форму ДММБ*. В этой модели переменные $\overline{x}_t$ и $\overline{C}_t$ являются экзогенными, все остальные – эндогенными. Модель (3.8) позволяет определить вектор валовых выпусков, который, с одной стороны, обеспечен необходимыми ОПФ, а с другой – сам обеспечивает желаемый уровень конечного потребления.

Если уже имеющиеся на начало планового периода ОПФ позволяют обеспечить желаемый уровень валового выпуска, то никакой необходимости в использовании модели (3.8) нет. В противном случае модель (3.8) позволяет постепенно придти к искомому вектору $\overline{x}_t$, отправляясь от заданных величин $\overline{x}_0$, $\overline{C}_0$ и $\overline{\Phi}_0$.

Пусть при $t = 0$ (базовый год) имеются наличные ОПФ $\overline{\Phi}_0$, позволяющие осуществить валовые выпуски $\overline{x}_0$, и, тем самым, обеспечить уровень потребления $\overline{C}_0$. Используя модель (3.8), можно получить последовательность

$$\left(\overline{x}_0,\ \overline{\Phi}_0,\ \overline{C}_0\right),\ \left(\overline{x}_1,\ \overline{\Phi}_1,\ \overline{y}_1\right),\ \ldots,\ \left(\overline{x}_T,\ \overline{\Phi}_T,\ \overline{y}_T = \overline{C}_T\right), \qquad (3.9)$$

где $\overline{C}_T$ – желаемый уровень конечного потребления. Для построения этой последовательности необходимо перейти к приведенной форме ДММБ:

$$\begin{cases} \Delta\overline{x}_t = K^{-1}\cdot\left(\overline{x}_t - A\cdot\overline{x}_t - \overline{C}_t\right), \\ \overline{I}_t = K\cdot\Delta\overline{x}_t\ , \\ \Delta\overline{\Phi}_t = \mathrm{f}\cdot\Delta\overline{x}_t\ , \\ \overline{y}_t = \overline{I}_t + \overline{C}_t\ , \\ \Delta\overline{y}_t = \left(E - A\right)\cdot\Delta\overline{x}_t\ , \qquad t = 0, 1, 2,\ \ldots,\ T\,. \end{cases} \qquad (3.10)$$

В уравнениях (3.10) эндогенные переменные $\Delta\overline{x}_t$, $\overline{I}_t$, $\Delta\overline{\Phi}_t$, $\overline{y}_t$ и $\Delta\overline{y}_t$ явно выражены через экзогенные переменные $\overline{x}_t$ и $\overline{C}_t$ (после подстановки в правые части найденного из первого уравнения $\Delta\overline{x}_t$).

Порядок действий, необходимый для построения последовательности (3.9), следующий.

- Пусть $t = 0$.

1) Из первого уравнения (3.10) находим

$$\Delta\overline{x}_0 = \overline{x}_1 - \overline{x}_0 = K^{-1}\cdot\left(\overline{x}_0 - A\cdot\overline{x}_0 - \overline{C}_0\right);$$

2) из второго уравнения (3.10)

$$\overline{I}_0 = K\cdot\Delta\overline{x}_0\,;$$

3) из третьего уравнения (3.10)

$$\Delta\overline{\Phi}_0 = \mathrm{f}\cdot\Delta\overline{x}_0\,,\quad \overline{\Phi}_1 = \overline{\Phi}_0 + \Delta\overline{\Phi}_0\,;$$

4) из последнего уравнения (3.10)

$$\Delta\overline{y}_0 = (E-A)\cdot\Delta\overline{x}_0\,,\qquad \overline{y}_1 = \overline{y}_0 + \Delta\overline{y}_0\,.$$

В результате построена тройка $\left(\overline{x}_1,\ \overline{\Phi}_1,\ \overline{y}_1\right)$.

Продуктивность матрицы *A* обеспечивает условие $\Delta\overline{y}_0 > 0$, т. е. $\overline{y}_1 > \overline{y}_0$.

- Если $\overline{y}_1 \geq \overline{C}_T$, то задача решена уже при $t + 1 = 1$.

  В противном случае некоторая часть вектора $\overline{y}_1$ должна быть выделена на инвестиции. Например, пусть

$$\overline{I}_1 = S\cdot\overline{y}_1\,,$$

где

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix},\quad 0 < s_i < 1,\quad i = 1, 2,\ \ldots,\ n\,,$$

s_i – принятые в отраслях производственного сектора нормы инвестиций. Тогда, с учетом четвертого уравнения (3.10), находим

$$\overline{C}_1 = (E - S)\cdot\overline{y}_1\,.$$

- Действия 1) – 4) выполняются для $t = 1$. Результатом является тройка $\left(\overline{x}_2,\ \overline{\Phi}_2,\ \overline{y}_2\right)$, причем $\overline{y}_2 > \overline{y}_1$.

  Далее выполняется проверка условия $\overline{y}_2 \geq \overline{C}_T$. По результатам этой проверки – либо завершение расчетов (достигнут желаемый уровень потребления), либо повторение вычислений для $t = 2$.

- И. т. д.

Анализ поведения вектора валовых выпусков во времени.

Вектор $\overline{x}_t$ как функция времени называется *траекторией производственного сектора экономики*. Если имеет место

$$\overline{x}_{t+1} = \lambda^* \cdot \overline{x}_t, \quad t = 0, 1, 2, \ \ldots \ , \quad \text{где } \lambda^* > 1,$$

то эта траектория называется *сбалансированной*, а константа ***λ**** – *темпом роста сбалансированной траектории*.

Возникает важный вопрос: при каких условиях существует сбалансированная траектория в ДММБ? Дальнейшие рассуждения имеют целью получить ответ на этот вопрос.

Подставим в правую часть второго уравнения (3.8) соотношение $\overline{I}_t = S \cdot \overline{y}_t$:

$$K \cdot \Delta\overline{x}_t = S \cdot \overline{y}_t ,$$

откуда

$$\overline{y}_t = S^{-1} \cdot K \cdot \Delta\overline{x}_t .$$

Обозначим $S^{-1} \cdot K = G$. Матрица G является неотрицательной; кроме того, если матрица K не вырождена, то невырожденной будет и матрица G. Объединяя $\overline{y}_t = G \cdot \Delta\overline{x}_t$ и $\overline{y}_t = \overline{x}_t - A \cdot \overline{x}_t$, получим уравнение замкнутого динамического баланса (не содержит экзогенной переменной $\overline{C}_t$):

$$\overline{x}_t - A \cdot \overline{x}_t = G \cdot (\overline{x}_{t+1} - \overline{x}_t),$$

откуда

$$\overline{x}_{t+1} = \left(E + G^{-1} \cdot (E - A)\right) \cdot \overline{x}_t .$$

Обозначим $H = E + G^{-1} \cdot (E - A)$, тогда

$$\overline{x}_{t+1} = H \cdot \overline{x}_t, \quad t = 0, 1, 2, \ \ldots \qquad (3.11)$$

<u>Теорема</u>. Если матрица A продуктивна, то матрица H имеет действительное собственное число λ^*, такое что $\lambda^* > 1$, причем этому собственному числу соответствует собственный вектор $\overline{x}^*$ с положительными компонентами:

$$H \cdot \overline{x}^* = \lambda^* \cdot \overline{x}^* .$$

Не приводя строгого доказательства теоремы, наметим только основные моменты, которые будут полезны в дальнейших построениях.

Учитывая, что $G \geq 0$, а также то, что в силу продуктивности матрицы *A* существует матрица $B = (E - A)^{-1} \geq 0$, можно заключить, что матрица $Q = (E - A)^{-1} \cdot G$ также является неотрицательной.

Кроме того, по теореме Перрона-Фробениуса среди собственных чисел $\lambda_j(Q),\ i = 1, 2,\ \ldots,\ n$, матрицы Q существует число $\lambda_1(Q) > 0$, такое что

$$\lambda_1(Q) = \max_{1 \leq j \leq n} \left| \lambda_j(Q) \right|,$$

и собственный вектор $\bar{x}^* > 0$, соответствующий собственному числу $\lambda_1(Q)$. Можно показать, что этот вектор $\bar{x}^*$ является также собственным вектором матрицы *H*, причем ему соответствует собственное число матрицы *H*, равное

$$\lambda^* = \left(1 + \lambda_1^{-1}(Q)\right). \qquad (3.12)$$

Из (3.12) вытекает, что $\lambda^* > 1$.

Из теоремы следует, что в случае продуктивности матрицы *A* в модели (3.11) существует сбалансированная траектория. Эта траектория может быть построена по схеме:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x}^*, \\ \bar{x}_2 &= \lambda^* \cdot \bar{x}_1, \\ \bar{x}_3 &= \lambda^* \cdot \bar{x}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \bar{x}_{t+1} &= \lambda^* \cdot \bar{x}_t, \quad t = 0, 1, 2,\ \ldots \end{aligned} \qquad (3.13)$$

где λ^* определяется, исходя из (3.12), а $\bar{x}^*$ – собственный вектор матрицы Q, соответствующий $\lambda_1(Q)$.

В. Леонтьев отмечал [5], что прогнозы по замкнутой модели (3.11) для экономики как США, так и Японии не намного отличаются от реальных векторов валового выпуска, но, в то же время, модель (3.11) слишком «жесткая и детерминистская». Поэтому на практике обычно используется открытая ДММБ.

Замечание. Модели (3.10) и (3.11) рассматривались в предположении, что матрица K капитальных коэффициентов не вырождена. На практике матрица K может содержать нулевые строки, соответствующие отраслям, не создающим основные фонды. В этом случае модель (3.10) модифицируется заменой матрицы K^{-1} на матрицу K^{+} – обобщенную обратную (псевдообратную) к матрице K, которая существует для любой матрицы. Более подробную информацию на эту тему можно получить в [5].

3.1.4 Магистральные модели

Рассмотренная в разделе 3.1.3 ДММБ позволяет планировать траекторию $\overline{x}_t$, $t = 0, 1, \ldots, T$ функционирования производственного сектора экономики. На основе модели (3.10) можно построить сопутствующие траектории ОПФ $\overline{\Phi}_t$ и конечных спросов $\overline{y}_t$. При этом: если существует сбалансированная траектория $\overline{x}_t$, то траектории $\overline{\Phi}_t$ и $\overline{y}_t$ также являются сбалансированными и обладают тем же темпом роста λ*.

С научной и практической точки зрения важно получение ответов на два следующие вопроса.

1) Существует ли в ДММБ сбалансированная траектория

$$\overline{x}_t *, \quad t = 0, 1, \ldots, T,$$

темп роста λ которой максимален?

2) Если ответ на первый вопрос положительный, то чем траектория $\overline{x}_t$ * лучше любой другой «хорошей» (в некотором смысле) траектории?

Для модели (3.11) ответ на первый вопрос является положительным: сбалансированная траектория с максимальным темпом роста определяется по правилам (3.12), (3.13).

Сбалансированные траектории с максимальным темпом роста называются *магистралями*[5]. Смысл этого названия станет понятным немного позднее, по результатам проведенного анализа.

Таким образом, в ДММБ (3.11) существует магистраль. Получение

---

[5] Термин введен американским экономистом, лауреатом Нобелевской премии П. Самуэльсоном.

ответа на второй вопрос более трудоемко. Оно базируется на специальной теории, использующей аналитические модели «затраты-выпуск» (частным случаем этих моделей являются СММБ и ДММБ В. Леонтьева). Модели «затраты-выпуск», в которых существуют магистрали, называются *магистральными*.

Первая магистральная модель была построена в 30-х гг. XX в. американским математиком Дж. фон Нейманом. Эта модель называется *моделью расширяющейся экономики* фон Неймана. Для построения этой модели (и обобщающей ее модели Гейла) необходима формализация понятий «производство» и «производственный процесс».

***Формализация понятий «производство» и «производственный процесс»* [5].**

Производством будем называть преобразование конкретных количеств $\bar{x}$ затрачиваемых продуктов в некоторые конкретные количества $\bar{y}$ выпускаемых продуктов. Такое преобразование осуществляется при помощи заданной технологии *T*.

Будем обозначать:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор затрачиваемых производством продуктов,

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ – вектор выпусков.

Технологическим (*производственным*) *процессом* (ТП) называется пара $(\bar{x},\ \bar{y})$. В случае, когда необходимо показать, что в данном ТП применяется технология *T*, используется обозначение $(\bar{x}\ T\ \bar{y})$.

Заданная технология *T* позволяет реализовать некоторое множество *M* различных ТП: $(\bar{x}',\ \bar{y}')$, $(\bar{x}'',\ \bar{y}'')$, … Это множество *M* называется *технологическим множеством* (ТМ) производственного сектора экономики.

***Модель Гейла* [5].**

Моделью Гейла называется ТМ, элементы $(\bar{x},\ \bar{y})$ которого удовлетворяют следующим четырем условиям.

1) Если $(\bar{0},\ \bar{y}) \in M$, то $\bar{y} = \bar{0}$.

   Неосуществимость «рога изобилия».

2) Множество M представляет собой выпуклый конус в пространстве R_{+}^{2n}, т. е.

   2.1) если $(\bar{x}_1,\ \bar{y}_1) \in M$ и $(\bar{x}_2,\ \bar{y}_2) \in M$, то $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2,\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2) \in M$;

   2.2) если $(\bar{x},\ \bar{y}) \in M$, то для любого скаляра $\alpha > 0$ $(\alpha \cdot \bar{x},\ \alpha \cdot \bar{y}) \in M$.

3) Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$, существует ТП $\left(\bar{x}^{(i)},\ \bar{y}^{(i)}\right) \in M$, такой, что i-я компонента $y_i^{(i)}$ вектора $\bar{y}^{(i)}$ строго положительна.

   Каждый из n продуктов может быть произведен (невоспроизводимые ресурсы не являются продуктами в модели Гейла)

4) Множество M замкнуто в R_{+}^{2n} (содержит все свои предельные точки).

Пример. Рассмотрим СММБ в натуральном выражении (2.17). Будем обозначать:

$\bar{u}$ – вектор затрат в натуральном выражении,

$\bar{v}$ – вектор выпусков в натуральном выражении,

A – матрица технологических коэффициентов в натуральном выражении.

В соответствии с предположениями модели $\bar{u} = A \cdot \bar{v}$, и ТМ данной модели определяется следующим образом:

$$M_L = \left\{ (A \cdot \bar{v},\ \bar{v}) \middle| \bar{v} \geq 0 \right\}.$$

Проверим выполнение условий 1) – 3) определения модели Гейла.

1) Пусть $(\bar{0},\ \bar{v}) \in M_L$. Это означает: $A \cdot \bar{v} = \bar{0}$, где $\bar{v} \geq \bar{0}$, или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v_j = 0, \quad i = 1, 2, \ \ldots,\ n.$$

Из экономического смысла матрицы A следует, что она не содержит нулевых столбцов. С учетом неотрицательности v_j и a_{ij} отсюда вытекает, что $\bar{v} = \bar{0}$.

2) Проверим выполнение условий 2.1) и 2.2).

2.1) Пусть $(\bar{u}_1,\ \bar{v}_1) \in M_L$, $(\bar{u}_2,\ \bar{v}_2) \in M_L$. Это означает:

$$\bar{u}_1 = A \cdot \bar{v}_1,\quad \bar{u}_2 = A \cdot \bar{v}_2.$$

Тогда $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = A \cdot \bar{v}_1 + A \cdot \bar{v}_2 = A \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$, т. е.

$$(\bar{u}_1 + \bar{u}_2,\ \bar{v}_1 + \bar{v}_2) \in M_L.$$

2.2) Пусть $(\bar{u},\ \bar{v}) \in M_L$, т. е. $\bar{u} = A \cdot \bar{v}$, $\alpha > 0$.

Тогда $\alpha \cdot \bar{u} = \alpha \cdot (A \cdot \bar{v}) = A \cdot (\alpha \cdot \bar{v})$, т. е.

$$(\alpha \cdot \bar{u},\ \alpha \cdot \bar{v}) \in M_L.$$

3) Из продуктивности матрицы A следует: мультипликатор Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$ существует, причем $b_{ii} \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определим n векторов конечных спросов по правилу:

$$\bar{e}^{(i)} = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array} \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

(справа от вектора указаны номера некоторых его компонентов). Соответствующие им вектора выпусков имеют вид:

$$\bar{v}^{(i)} = B \cdot \bar{e}^{(i)} = \begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ \cdots \\ v_i^{(i)} \\ \cdots \\ v_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $v_i^{(i)} = b_{ii} \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Соответствующие векторам $\bar{v}^{(i)}$ векторы затрат определяются как

$$\bar{u}^{(i)} = A \cdot \bar{v}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ \ldots, n.$$

Это означает, что в ТП $\left(\bar{u}^{(i)}, \ \bar{v}^{(i)}\right) \in M_L$ компонента $v_i^{(i)}$ вектора $\bar{v}_i^{(i)}$ положительна.

Условие 4) может быть проверено методами математического анализа. Доказательство выполнения этого условия для множества M_L можно найти, например, в [5].

По итогам рассмотрения данного примера можно сделать вывод: множество M_L является моделью Гейла.

В рамках модели Гейла естественно задается динамика развития экономики. Пусть $(\bar{x}, \ \bar{y}) \in M$. Будем предполагать:

- вектор $\bar{x}$ потребляется (в процессе производства) в текущий момент времени t,
- вектор $\bar{y}$ производится в следующий момент $t + 1$.

Тогда вектор $\bar{x} = \bar{x}(t)$ характеризует состояние экономики (в смысле запаса продуктов) в текущий момент t, а вектор $\bar{y} = \bar{x}(t+1)$ характеризует состояние экономики в следующий момент $t + 1$, причем $(\bar{x}(t), \ \bar{x}(t+1)) \in M$. Динамика состояния экономики описывается последовательностью

$$\bar{x}(t), \ \bar{x}(t+1), \ \bar{x}(t+2), \ \ldots$$

Это движение является самоподдерживающимся, т. к. приток извне отсутствует по предположению.

<u>Замечание</u>. Следует обратить внимание на то, что из $(\bar{x}(t), \ \bar{x}(t+1)) \in M$ в общем случае не следует, что $(\bar{x}(t+1), \ \bar{x}(t+2)) \in M$.

Последовательность $\{\bar{x}(t)\}_{t=0}^{T} \in R_+^n$ называется *допустимой траекторией в модели Гейла М на конечном интервале времени Т*, если

для всех $t = 0, 1, \ldots, T–1$ $\quad (\bar{x}(t), \ \bar{x}(t+1)) \in M$.

Если $(\bar{x}(t), \ \bar{x}(t+1)) \in M$ для t = 0, 1, 2, … (т. е. $T = \infty$), то траектория $\{\bar{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ называется *допустимой на бесконечном интервале времени*.

Не равная тождественно нулю допустимая траектория $\{\bar{x}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ называется *траекторией сбалансированного роста*, если

$$\text{для всех } t = 0, 1, 2, \dots \quad \bar{x}(t+1) = \lambda \cdot \bar{x}(t), \tag{3.14}$$

где положительная константа λ называется *темпом роста сбалансированной траектории*.

Магистралью называется сбалансированная траектория $\{\bar{x}^*(t)\}_{t=0}^{\infty}$ с максимальным темпом роста λ. Можно показать, что магистраль, если она существует, для всех $t = 0, 1, 2, \dots$ принадлежит лучу

$$l_N = \{\alpha \cdot \bar{x}^*(0) | \alpha \geq 0\} \subset R_+^n .$$

Этот луч называется *неймановским лучом*.

Для сбалансированных траекторий модели Гейла понятие темпа роста определено соотношением (3.14). Это понятие можно распространить на любой ТП $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$ следующим образом.

Для тривиального ТП $(\bar{0}, \bar{0})$ зададим, по определению, темп роста

$$\lambda(\bar{0}, \bar{0}) = 0.$$

Пусть теперь $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$. Темп роста ТП $(\bar{x}, \bar{y})$ примем равным

$$\lambda(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{x_i > 0} \frac{y_i}{x_i}$$

(минимум берется по всем положительным компонентам вектора $\bar{x}$).

<u>Замечание</u>. Можно показать, что темп роста любой сбалансированной траектории (3.14) модели Гейла может быть вычислен по введенному правилу.

Нетрудно убедиться, что функция $\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ обладает свойством:

$$\lambda(\mu \cdot \bar{x}, \mu \cdot \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$$

при любом $\mu > 0$. Это позволяет трактовать ТП $(\mu \cdot \bar{x}, \mu \cdot \bar{y}) = \mu(\bar{x}, \bar{y})$ как ТП $(\bar{x}, \bar{y})$, функционирующий с интенсивностью μ. Следовательно, все ТП, принадлежащие лучу

$$l = \{\mu \cdot (\bar{x}, \bar{y}) | (\bar{x}, \bar{y}) \in M, \ \mu \geq 0\},$$

порожденному ТП $(\bar{x},\ \bar{y}) \neq (\bar{0},\ \bar{0})$ различаются только интенсивностями функционирования. ТП $(\bar{x},\ \bar{y})$ может рассматриваться как базисный ТП для всех ТП, принадлежащих этому лучу.

Модель расширяющейся экономики фон Неймана.

Модель фон Неймана может рассматриваться как обобщение модели Леонтьева: допускается производство одного продукта разными способами (в то время как в модели Леонтьева каждая отрасль производит один продукт, и никакая другая отрасль не может производить этот продукт).

В модели фон Неймана имеется n продуктов и m способов их производства. Каждый (j-й) способ производства может быть задан двумя векторами: вектором затрат $\bar{a}_j$ и вектором выпусков $\bar{b}_j$,

$$\bar{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

в расчете на единицу интенсивности процесса. Ясно, что

$$a_{ij} \geq 0,\ \ b_{ij} \geq 0,\quad i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Примем естественные предположения:

- для реализации любого ТП необходимы затраты хотя бы одного продукта, т. е. для каждого j найдется хотя бы одно i, такое что $a_{ij} > 0$;
- каждый продукт может быть произведен хотя бы одним способом, т. е. для каждого i существует некоторое j, такое, что $b_{ij} > 0$.

Будем рассматривать модель Гейла, в которой существуют $m \geq n$ лучей

$$l_j = \left\{\mu \cdot (\bar{a}_j, \bar{b}_j) \middle| (\bar{a}_j, \bar{b}_j) \in M,\ \mu \geq 0\right\},\quad j = 1, 2,\ \ldots,\ m,$$

таких, что матрицы A и B, столбцами которых являются, соответственно, векторы $\bar{a}_j$ и $\bar{b}_j$, обладают свойствами:

- в матрице A нет нулевых столбцов;
- в матрице B нет ни нулевых столбцов, ни нулевых строк.

Такая модель Гейла существует при $m \geq n$ в силу свойства 3). В данной модели можно выделить подмножество

$$M_N = \left\{\left(A \cdot \overline{\mu}, B \cdot \overline{\mu}\right) \middle| \overline{\mu} \in R_+^m\right\}, \tag{3.15}$$

которое, как можно убедиться путем проверки условий 1) – 4), само является моделью Гейла.

Множество M_N описывает *модель расширяющейся экономики фон Неймана*. Вектор $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)^T \in R_+^m$ в модели (3.15) называется *вектором интенсивностей функционирования базисных ТП*.

Технология в модели (3.15) задается парой матриц (A, B): $T = (A, B)$.

Технология модели (3.15) называется *неразложимой*, если не существует подмножества продуктов, которые можно произвести при помощи $T = (A, B)$ без использования, по крайней мере, одного продукта, не принадлежащего этому подмножеству. Достаточным (но не необходимым) условием неразложимости технологии (A, B) является отсутствие нулевых элементов в матрице A.

В модели фон Неймана вектор затрат $\overline{x} = A \cdot \overline{\mu}$, вектор выпусков $\overline{y} = B \cdot \overline{\mu}$, и любая траектория имеет вид

$$\{\overline{x}(t)\}_{t=0}^{T} = \{A \cdot \overline{\mu}(t)\}_{t=0}^{T}. \tag{3.16}$$

Это значит, что формирование траектории (3.16) эквивалентно генерированию соответствующей траектории интенсивностей $\{\overline{\mu}(t)\}_{t=0}^{T}$. В частности, если $\{\overline{\mu}^*(t)\}_{t=0}^{\infty}$ – сбалансированная траектория максимального роста, то соответствующая ей траектория (3.16) будет магистралью в M_N.

Методика формирования траекторий $\{\overline{\mu}(t)\}_{t=0}^{T}$, задающих магистраль в M_N, предполагает одновременное построение сопутствующих траекторий $\{\overline{p}(t)\}_{t=0}^{T}$ векторов цен на затрачиваемые и производимые в момент времени t продукты $\overline{x}(t)$ и $\overline{y}(t)$. Возможность построения магистрали в M_N на основе этой методики обосновывается фундаментальной теоремой математической экономики, доказанной фон Нейманом.

<u>Теорема</u>. В модели M_N с технологией (A, B), в которой матрица A не

имеет нулевых столбцов, а матрица B не содержит нулевых строк, существуют ненулевые неотрицательные векторы $\overline{\mu}(0)$ (m×1) и $\overline{p}(0)$ (n×1), а также положительный скаляр λ, при которых справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \lambda \cdot A \cdot \overline{\mu}(0) \le B \cdot \overline{\mu}(0), \\ \lambda \cdot \overline{p}^T(0) \cdot A \cdot \overline{\mu}(0) = \overline{p}^T(0) \cdot B \cdot \overline{\mu}(0), \\ \lambda \cdot \overline{p}^T(0) \cdot A \ge \overline{p}^T(0) \cdot B. \end{cases}$$

Если к тому же технология (A, B) неразложима, то скаляр λ единственен и имеет место равенство

$$\lambda = 1 + \beta^* = 1 + \rho^*,$$

где β^* – наибольшее решение неравенства

$$(1+\beta) \cdot A \cdot \overline{\mu}(0) \le B \cdot \overline{\mu}(0),$$

а ρ^* – наименьшее решение неравенства

$$(1+\rho) \cdot \overline{p}^T(0) \cdot A \ge \overline{p}^T(0) \cdot B.$$

Замечание. Из утверждения теоремы не следует, что $\lambda = 1 + \beta^* > 1$. Теорема утверждает только, что $\lambda > 0$; возможна ситуация, когда $\lambda \le 1$. Это определяется технологией (A, B) конкретной модели M_N.

Из теоремы следует:

- при неразложимой технологии (A, B) в модели M_N существует магистраль с положительным темпом роста λ, которую можно построить, применяя специальную методику[6];
- эта магистраль принадлежит неймановскому лучу

$$l_N = \{\alpha \cdot A \cdot \overline{\mu}(0) | \alpha \ge 0\} \subset R_+^n.$$

Если неразложимая технология (A, B) такова, что $\lambda > 1$, то множество (3.15) является *моделью расширяющейся экономики фон Неймана*.

Оптимальные траектории.

Проводимые далее рассуждения имеют своей целью получение ответа на второй из поставленных в начале раздела 3.1.4 вопросов (относительно оптимальности траекторий). Для этого необходима формализация понятий

[6] Описание этой методики можно найти, например, в [5].

«хорошей», «оптимальной» траектории.

Пусть M – технологическое множество, в котором существует магистраль; $\bar{x}_0$ – фиксированный неотрицательный вектор, такой, что в модели M существует допустимая траектория $\{\bar{x}(t)\}_{t=0}^{T}$, выходящая из точки $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$.

Предположим, что существует более одной допустимой траектории длины T, выходящей из точки $\bar{x}_0$. Множество таких траекторий обозначим $X(\bar{x}_0, T)$.

Допустимая траектория $\{\bar{x}^+(t)\} \in X(\bar{x}_0, T)$ называется *эффективной в* $X(\bar{x}_0, T)$, если для всякой другой траектории $\{\bar{x}(t)\} \in X(\bar{x}_0, T)$ справедливо

$$\bar{x}^+(T) \geq \bar{x}(T).$$

Эффективная траектория обеспечивает максимальный запас каждого производимого продукта в момент времени T (на конец периода).

Удобнее оценивать достоинство любой траектории не самим вектором $\bar{x}(T)$, а некоторым неотрицательным числом (зависящим, конечно, от этого вектора): $u(\bar{x}(T))$. При таком подходе каждой траектории $\{\bar{x}(t)\} \in X(\bar{x}_0, T)$ сопоставляется число $u(\bar{x}(T))$, тем самым, определяется некоторая скалярная функция $u(\bar{x})$. Типичным способом построения функции $u(\bar{x})$ является оценка стоимости вектора $\bar{x}(T)$:

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i,$$

где $p_i \geq 0$ – цена i-го продукта, $i = 1, 2, \dots, n$. В таком случае функция $u(\bar{x})$, измеряющая достоинство траектории, характеризуется вектором $\bar{p} \geq 0$ своих коэффициентов. Очевидно, что достаточно рассматривать только нормированные векторы $\bar{p}$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Обозначим $U = \left\{ u(\bar{x}) \middle| u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ p_i \geq 0 \right\}$ –

класс функций, при помощи которых оцениваются траектории $\{\bar{x}(t)\} \in X(\bar{x}_0, T)$.

Траектория $\{\bar{x}^{(u)}(t)\} \in X(\bar{x}_0, T)$ называется *u-оптимальной в* $X(\bar{x}_0, T)$, если для некоторой функции $u(\bar{x}) \in U$ справедливо

$$u\left(\bar{x}^{(u)}(T)\right) = \max_{\{\bar{x}(t)\} \in X(\bar{x}_0,\, T)} u\left(\bar{x}(T)\right)$$

(максимум берется по всем траекториям $\{\bar{x}(t)\} \in X(\bar{x}_0, T)$).

Для оценки близости какой-либо траектории к оптимальной необходим способ измерения близости двух траекторий. В качестве меры $\rho\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\right)$ близости между векторами $\bar{x}^{(1)}$ и $\bar{x}^{(2)}$ будем использовать угловое расстояние между этими векторами:

$$\rho_R(t) = \rho_R\left(\bar{x}^{(1)}(t),\ \bar{x}^{(2)}(t)\right) = \left\| \frac{\bar{x}^{(1)}(t)}{\left\|\bar{x}^{(1)}(t)\right\|_2} - \frac{\bar{x}^{(2)}(t)}{\left\|\bar{x}^{(2)}(t)\right\|_2} \right\|_2,$$

где $\|\bar{x}\|_2$ – норма вектора $\bar{x}$, определяемая по правилу: $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

<u>Теорема (о магистрали)</u>. Пусть $\{\bar{x}*(t)\}_{t=0}^{\infty}$ – магистраль модели *M*, $\{\bar{x}^{(u)}(t)\}_{t=0}^{T}$ – любая *u*-оптимальная траектория, выходящая из заданного состояния $\bar{x}_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое $k = k(\varepsilon)$, такое, что имеет место

$$\rho_R\left(\bar{x}^{(u)}(t),\ \bar{x}*(t)\right) < \varepsilon$$

для всех *t*, удовлетворяющих $k \le t \le T - k$.

Теорема выявляет замечательное свойство магистрали: любая *u*-оптимальная траектория (в частности, эффективная) приближается к неймановскому лучу, по крайней мере «в средней части» своего интервала. Этому свойству можно придать наглядную бытовую трактовку, благодаря которой сбалансированные траектории с максимальным темпом роста и называются магистралями: для того, чтобы оптимальным образом «добраться» из начального пункта $\bar{x}_0$ в конечный пункт $\bar{x}^{(u)}(T)$, следует выбраться на магистраль (улучшенную дорогу скоростного движения), «двигаться» по ней возможно дольше, и лишь в конце свернуть в пункт назначения $\overline{x}^{(u)}(T)$. Иллюстрация этого свойства магистрали для n = 2 дана на рис. 3.1.

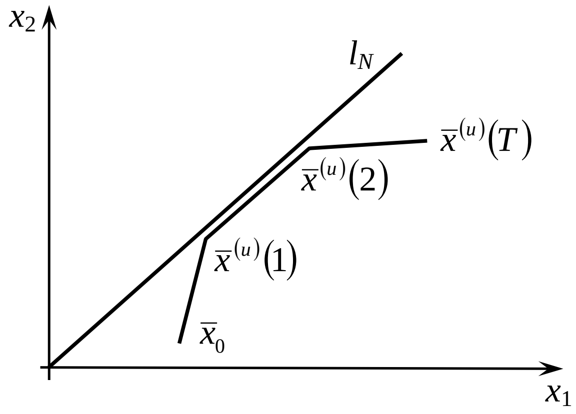


Рисунок 3.1. Иллюстрация к теореме о магистрали.

Реальный числовой пример, иллюстрирующий применение теоремы о магистрали, будет рассмотрен для так называемой *магистральной модели накопления*.

Магистральная модель накопления.

Из соотношений (2.11) и (2.14) СММБ следует тождество межотраслевого баланса:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i .$$

Обозначим: $y(t)$ – суммарная конечная продукция производственного сектора в момент t. Тогда

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i(t).$$

Предположим, что в уравнении (3.7) ДММБ вектор потребления $\overline{C_t}$ может быть найден как

$$\overline{C}(t) = \overline{h} \cdot y(t),$$

где $\overline{h}$ – вектор заданных коэффициентов. Подставив это соотношение в (3.7), получим:

$$\bar{x}(t) - A \cdot \bar{x}(t) - K \cdot (\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t)) = \bar{h} \cdot \bar{v}^T \cdot \bar{x}(t),$$

или

$$\bar{x}(t) = \tilde{A} \cdot \bar{x}(t) + K \cdot (\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t)), \qquad (3.17)$$

где $\tilde{A} = A + \bar{h} \cdot \bar{v}^T$.

Модель (3.17) определяет технологическое множество *M*, включающее пары $(\bar{x}(t), \bar{x}(t+1))$, удовлетворяющие равенству (3.17). Дополним это множество парами $(\bar{x}(t), \bar{x}(t+1))$, которые удовлетворяют неравенству

$$\bar{x}(t) \geq \tilde{A} \cdot \bar{x}(t) + K \cdot (\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t)).$$

В итоге получим технологическое множество

$$M_{DL} = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \middle| \bar{x}, \bar{y} \in R_+^n;\ \bar{x} \geq \tilde{A} \cdot \bar{x} + K \cdot (\bar{y} - \bar{x}) \right\}. \qquad (3.18)$$

Множество M_{DL} называется *магистральной моделью накопления*.

Можно показать[7], что если $\det(E - \tilde{A}) \neq 0$ и $(E - \tilde{A})^{-1} \cdot K > 0$, то в M_{DL} существует магистраль

$$\bar{x}^*(t) = (1 + \beta^*)^t \cdot \bar{x}^*, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

темп роста которой равен

$$1 + \beta^* = 1 + \frac{1}{\lambda_1} > 1,$$

где λ_1 – максимальное по модулю собственное число матрицы $(E - \tilde{A})^{-1} \cdot K$, $\bar{x}^* > 0$ – соответствующий ему собственный вектор.

Пусть задано начальное состояние $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$. Следует заметить, что согласно (3.18) $\bar{y} \geq 0$, поэтому, с учетом *K* ≥ 0, вектор $\bar{x}_0$ должен удовлетворять неравенству

$$(E - \tilde{A} + K) \cdot \bar{x}_0 \geq 0. \qquad (3.19)$$

Согласно определению, *u*-оптимальная траектория в M_{DL} может быть найдена путем решения следующей оптимизационной задачи:

---

[7] Более подробное обоснование см. в [5].

$$u = u(\bar{x}(T)) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot x_i(T) \quad \to \quad \max,$$

$$\begin{cases} \bar{x}(t) \geq \tilde{A} \cdot \bar{x}(t) + K \cdot (\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t)), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \\ \bar{x}(t) \geq 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases} \tag{3.20}$$

при условии, что вектор $\bar{x}_0$ удовлетворяет (3.19).

Задача (3.20) является задачей линейного программирования, и, следовательно, может быть решена симплекс-методом.

<u>Пример</u> [5]. Для трех отраслей экономики Японии 1965 г. коэффициенты ДММБ заданы следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1269 & 0{,}0695 & 0{,}0014 \\ 0{,}2312 & 0{,}4884 & 0{,}1958 \\ 0{,}0547 & 0{,}1065 & 0{,}1374 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0{,}2170 & 0{,}0033 & 0{,}0081 \\ 1{,}7287 & 0{,}6067 & 1{,}0700 \\ 0{,}0702 & 0{,}0424 & 0{,}0987 \end{pmatrix},$$

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} -0{,}0142 \\ 0{,}3589 \\ 0{,}3962 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0{,}6591 \\ 0{,}3351 \\ 0{,}7523 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что при этих данных в модели (3.18) существует магистраль.

$$\tilde{A} = A + \bar{h} \cdot \bar{v}^T = \begin{pmatrix} 0{,}1175 & 0{,}0647 & -0{,}0093 \\ 0{,}4678 & 0{,}6087 & 0{,}4658 \\ 0{,}3158 & 0{,}2393 & 0{,}4355 \end{pmatrix},$$

$$\det(E - \tilde{A}) = 0{,}0722; \quad (E - \tilde{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5169 & 0{,}4757 & 0{,}3675 \\ 5{,}6974 & 6{,}9435 & 5{,}6354 \\ 3{,}2633 & 3{,}2089 & 4{,}3654 \end{pmatrix},$$

$$(E - \tilde{A})^{-1} \cdot K = \begin{pmatrix} 1{,}1772 & 0{,}3092 & 0{,}5575 \\ 13{,}6352 & 4{,}4704 & 8{,}0319 \\ 6{,}5619 & 2{,}1427 & 3{,}8909 \end{pmatrix}.$$

Матрица $(E - \tilde{A})^{-1}$ существует, и $(E - \tilde{A})^{-1} \cdot K > 0$, поэтому в модели (3.18) с имеющимися исходными данными существует магистраль. Найдем эту магистраль.

Максимальное по модулю собственное число матрицы $(E - \tilde{A})^{-1} \cdot K$, найденное приближенно с помощью программы *MatLab*, равно

$$\lambda_1 = 9{,}3077;$$

соответствующий ему собственный вектор

$$\overline{x}^* = (0{,}0458\ \ 0{,}6411\ \ 0{,}3102)^T$$

выбран так, чтобы $\sum_{i=1}^{3} x_i^* = 1$. Темп роста магистрали равен

$$1+\beta^* = 1+\frac{1}{\lambda_1} = 1{,}1074;$$

а сама магистраль определяется соотношением

$$\overline{x}^*(t) = (1{,}1074)^t \cdot (0{,}0458\ \ 0{,}6411\ \ 0{,}3102)^T, \quad t = 0, 1, 2, \ \ldots,$$

Все векторы этой магистрали принадлежат неймановскому лучу

$$l_N = \left\{\alpha \cdot (0{,}0458\ \ 0{,}6411\ \ 0{,}3102)^T \,\middle|\, \alpha \ge 0\right\}.$$

Любой ненулевой вектор $\alpha \cdot \overline{x}^*(t) \in l_N$ имеет следующую пропорцию компонент:

$$0{,}0458 : 0{,}6411 : 0{,}3102. \qquad (3.21)$$

Для определения допустимых векторов начальных состояний используем матрицу

$$E - \widetilde{A} + K = \begin{pmatrix} 1{,}0995 & -0{,}0614 & 0{,}0174 \\ 1{,}2609 & 0{,}9980 & 0{,}6042 \\ -0{,}2456 & -0{,}1969 & 0{,}6632 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что следующие три вектора удовлетворяют условию (3.19):

$$\overline{x}_0^{(1)} = (0\ \ 0\ \ 1)^T, \quad \overline{x}_0^{(2)} = (0{,}3\ \ 0{,}3\ \ 0{,}4)^T, \quad \overline{x}_0^{(3)} = (0{,}1\ \ 0{,}5\ \ 0{,}3)^T.$$

Коэффициенты функции *u*, оценивающей достоинство допустимой траектории, можно выбрать, например, следующим образом:

$$\overline{u} = K^T \cdot \overline{p}$$

(одна из возможных методик, описанных в литературе). Положим, для определенности, вектор $\overline{p}$ равным $\overline{p} = \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right)^T$. Тогда

$$\overline{u} = K^T \cdot \overline{p} = (0{,}6720 \quad 0{,}2175 \quad 0{,}3923)^T.$$

Положим $T = 3$. Для каждого из выбранных ранее начальных состояний построим u-оптимальную траекторию $\left\{\overline{x}^{(u)}(t)\right\}_{t=0}^{3}$. Для этого следует решить задачу ЛП (3.20) с заданными $\tilde{A}$, K, $\overline{u}$ и неизвестными

$$x_1(1), x_2(1), x_3(1), x_1(2), x_2(2), x_3(2), x_1(3), x_2(3), x_3(3).$$

Решения этой задачи, найденные с помощью *MS Excel*, представлены в таблицах 3.2 – 3.4.

Таблица 3.2

Решение оптимизационной задачи для $\overline{x}_0^{(1)} = (0\ \ 0\ \ 1)^T$.

$\overline{x}^{(u)}(t)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
$\overline{x}_1^{(u)}(t)$	0	0,03316	0,03071	0
$\overline{x}_2^{(u)}(t)$	0	0,48710	0,53891	0,16890
$\overline{x}_3^{(u)}(t)$	1	0,23491	0,27087	0,59602
$u\left(\overline{x}^{(u)}(3)\right)$	0,27053			

Таблица 3.3

Решение оптимизационной задачи для $\overline{x}_0^{(2)} = (0{,}3\ \ 0{,}3\ \ 0{,}4)^T$.

$\overline{x}^{(u)}(t)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
$\overline{x}_1^{(u)}(t)$	0,3	0,05045	0,04672	0
$\overline{x}_2^{(u)}(t)$	0,3	0,74117	0,82001	0,25700
$\overline{x}_3^{(u)}(t)$	0,4	0,35744	0,41216	0,90690
$u\left(\overline{x}^{(u)}(3)\right)$	0,41164			

Таблица 3.4

Решение оптимизационной задачи для $\overline{x}_0^{(3)} = (0{,}1\ \ 0{,}5\ \ 0{,}3)^T$.

$\overline{x}^{(u)}(t)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
$\overline{x}_1^{(u)}(t)$	0,1	0,04425	0,04098	0
$\overline{x}_2^{(u)}(t)$	0,5	0,65007	0,71922	0,22541
$\overline{x}_3^{(u)}(t)$	0,3	0,31351	0,36150	0,79543
$u\left(\overline{x}^{(u)}(3)\right)$	0,36104			

По данным таблиц 3.2 – 3.4 видно, что каждая из трех *u*-оптимальных траекторий, выходя из своего начального состояния, в середине временного интервала, при $t = 1$ и $t = 2$ имеет пропорции компонент векторов $\overline{x}^{(u)}(1)$ и $\overline{x}^{(u)}(2)$ близкие к (3.21), – пропорциям, определяемым неймановским лучом. Это и означает, что в середине временного интервала каждая из *u*-оптимальных траекторий приближается (в смысле углового расстояния) к лучу l_N.

3.2 Модели с непрерывным временем

В экономике, как и в других динамических системах, под влиянием внешних и внутренних (в том числе, управляющих) воздействий возникают переходные процессы. Примерами воздействий, приводящих к появлению переходных процессов, могут быть: переход от одного технологического уклада к другому, изменение конъюнктуры внешнего или внутреннего рынков, новые правила регулирования поведения субъектов экономики (например, по сбору налогов), рост или падение инвестиций и т. д. Изучение переходных процессов удобнее выполнять в непрерывном времени.

Основные результаты в исследовании динамических систем с непрерывным временем получены при изучении технических систем в рамках теории автоматического управления. Основным математическим инструментом, используемым для этих целей, является аппарат дифференциальных уравнений. Результаты, полученные для технических приложений еще в XIX в., на современном этапе адаптируются для экономических систем.

3.2.1 Математические методы исследования непрерывных динамических систем

В общем случае динамический (нелинейный) элемент n-го порядка с одним входом и одним выходом определяется уравнением

$$F\left(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ \ldots,\ y,\ x^{(m)},\ x^{(m-1)},\ \ldots,\ x\right) = 0,$$

где $x(t)$ – входное воздействие (вход),

$y(t)$ – реакция элемента на входное воздействие (выход),

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}, \quad x^{(m)} = \frac{d^m x}{dt^m}.$$

В теории нелинейных систем точные решения уравнений модели известны только для узкого круга задач. Поэтому используют *линеаризацию* – преобразование исходных нелинейных уравнений в линейные. Одним из основных методов линеаризации является разложение нелинейных функций в ряд Тейлора и отбрасывание слагаемых, нелинейных относительно приращений переменных и их производных.

Линейный динамический элемент n-го порядка определяется уравнением

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\, y^{(j)} = \sum_{i=0}^{m} b_i\, x^{(i)}, \qquad (3.22)$$

или

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + \ \ldots\ + a_n y^{(n)} = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \ \ldots\ + b_m x^{(m)}.$$

В экономических приложениях наиболее часто встречаются следующие элементы:

- нулевого порядка (*мультипликатор*, *акселератор*);
- первого порядка (*инерционное звено*);

- второго порядка (*колебательное звено* или последовательное соединение двух инерционных звеньев).

Мультипликатор.

Мультипликатором называется линейное статическое звено, определяемое уравнением

$$a_0 y = b_0 x,$$

или, $y = \alpha \cdot x$, $\alpha = \dfrac{b_0}{a_0}$ – коэффициент усиления.

Пример. Зависимость ВВП Y (выход) от валовых инвестиций I (вход) имеет вид:

$$Y = \frac{1}{\rho} \cdot I,$$

где ρ – доля валовых инвестиций в ВВП.

Коэффициент усиления (мультипликатор) $\dfrac{1}{\rho} \left(\dfrac{1}{\rho} > 1 \right)$ показывает, насколько должен быть увеличен ВВП для увеличения валовых инвестиций на единицу.

Замечание. Термин «мультипликатор» применяется и к линейному звену нулевого порядка, и к коэффициенту усиления.

Акселератор.

Акселератор – это дифференцирующее звено нулевого порядка, выход которого пропорционален скорости входа:

$$a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt}.$$

Пример. Зависимость инвестиций от скорости изменения ВВП имеет вид:

$$I = r \cdot \frac{dY}{dt},$$

где r – коэффициент акселерации (прирост потребности в инвестициях при увеличении ВВП на единицу).

Замечание. При дискретном времени t аналог этого уравнения имеет вид: $I_t \cdot \Delta t \; = \; r \cdot \Delta t\left(Y_t - Y_{t-\Delta t}\right)$, или, при $\Delta t = 1$:

$$I_t \; = \; r \cdot \left(Y_t - Y_{t-1}\right). \tag{3.23}$$

Инерционное звено.

Инерционное звено определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \; = \; x(t).$$

В теории управления обычно используется стандартная запись дифференциального уравнения, в которой функция y входит в уравнение с коэффициентом 1. Для приведения уравнения инерционного звена к стандартной форме достаточно разделить обе части уравнения на a_0:

$$T \frac{dy}{dt} + y \; = \; \tilde{x}(t),$$

где $T = \dfrac{a_1}{a_0}$, $\quad \tilde{x}(t) = \dfrac{x(t)}{a_0}$.

Пример [1]. *Модель освоения введенных производственных мощностей.*

Введем обозначения: x = *const* – введенная производственная мощность; $y(t)$ – фактическое производство на этой мощности в момент времени t (фактическое использование мощности), $y(t) \le x$.

Предположим, что прирост производства пропорционален недоиспользованной мощности:

$$\Delta y \; = \; \gamma \cdot (x - y)\Delta t.$$

Разделим обе части этого равенства на $\gamma \cdot \Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Получим уравнение:

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dy}{dt} + y \; = \; x(t). \tag{3.24}$$

Это уравнение инерционного звена, где $T = \dfrac{1}{\gamma}$, $\quad y(0) = y_0$, $\quad y_0 < x$.

Общее решение уравнения (3.24) может быть получено как сумма общего решения соответствующего ему однородного уравнения и какого-нибудь частного решения (3.24). Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$T\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$T \cdot \lambda + 1 = 0$$

имеет корень $\lambda = -\frac{1}{T}$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_о(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}, \qquad (3.25)$$

где C – произвольная постоянная.

Легко убедиться, что $y = x$ является частным решением уравнения (3.24), потому его общее решение может быть записано в виде

$$y(t) = x + Ce^{-\frac{t}{T}}.$$

Константа C может быть найдена из начального условия $y(0) = y_0$: $y_0 = x + Ce^0$, откуда $C = y_0 - x$.

Окончательно получим:

$$y(t) = x + (y_0 - x)e^{-\frac{t}{T}}.$$

Выясним поведение функции $y(t)$ при $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(x + (y_0 - x)e^{-\frac{t}{T}}\right) = x.$$

Это означает, что переходный процесс освоения производственных мощностей завершается выходом на заданный размер мощности. Характер переходного процесса показан на рис. 3.2.

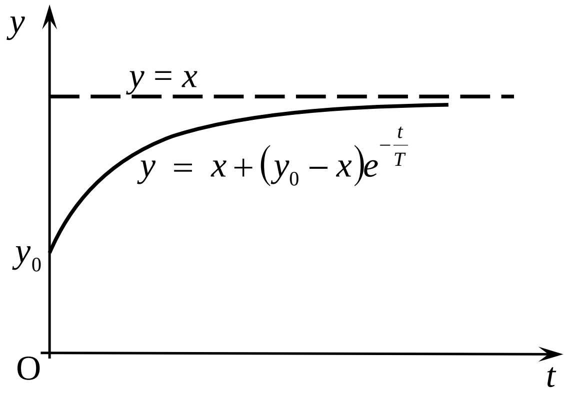


Рисунок 3.2. Переходный процесс освоения производственных мощностей.

Значение T характеризует инерционность звена (скорость его реакции на изменение входа). Например, при $y_0 = 0$ $y(t) = x\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$, и при $t = T$

$$y(T) = x\left(1 - e^{-1}\right) \approx \frac{2}{3}x,$$

т. е. T – это промежуток времени, который требуется для освоения $\approx \frac{2}{3}$ заданного размера мощности. Чем больше этот промежуток (величина T), тем более инерционным является звено (тем меньше скорость реакции звена на входное воздействие).

Еще один пример инерционного звена (модель установления равновесной цены) будет рассмотрен в разделе 5.3.1.

Колебательное звено.

Колебательное звено определяется дифференциальным уравнением второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}$$

при условии $a_1^2 - 4a_0 \cdot a_2 < 0$ (дискриминант характеристического уравнения отрицателен).

Колебательное звено описывает циклические процессы в экономике.

Более подробное знакомство с уравнением этого типа состоится в разделе 3.2.3 на примере модели Самуэльсона-Хикса.

3.2.2 Экономика в форме модели Кейнса как инерционное звено

В динамической модели Кейнса, рассмотренной в разделе 3.1.1, предполагалось, что ВВП будущего года должен быть равен совокупному спросу текущего года, причем совокупный спрос включает спрос на потребительские (C) и инвестиционные (I) товары, и зависит только от ВВП текущего года. Предположения о линейной зависимости спроса на потребительские товары от ВВП и постоянстве инвестиций привели к уравнению (3.1).

Запишем уравнение (3.1) в виде

$$y(t+1) = \underline{C} + cy(t) + I, \qquad (3.26)$$

где $\underline{C}$ – минимальный объем фонда потребления,

c $(0 < c < 1)$ – предельная склонность к потреблению.

В уравнении (3.26) дискретность (шаг) по времени составляет 1 год. Предположим, что дискретность по времени равна Δt. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \left(\underline{C} - (1-c)y(t) + I\right)\Delta t,$$

где коэффициент $(1 - c)$ характеризует предельную склонность к накоплению. Разделим обе части этого уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Получим:

$$\frac{dy}{dt} = \underline{C} - (1-c)y + I,$$

или, в стандартной форме,

$$\frac{1}{1-c}\cdot\frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C} + I}{1-c}. \qquad (3.27)$$

Это уравнение инерционного звена, в котором $T = \frac{1}{1-c}$. Решение этого уравнения находится так же, как в модели освоения введенных производственных мощностей (см. раздел 3.2.1). Заменяя в (3.25) константу T на $\frac{1}{1-c}$, получим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0(t) = Ce^{-t(1-c)}.$$

Используя в качестве частного решения уравнения (3.27) $y = y_E = \dfrac{C+I}{1-c}$ и начальное условие $y(0) = y_0$, окончательно получим:

$$y(t) = y_E + (y_0 - y_E)e^{-t(1-c)}.$$

При $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(y_E + (y_0 - y_E)e^{-t(1-c)}\right) = y_E .$$

Характер переходного процесса при $y_0 < y_E$ показан на рис. 3.3.

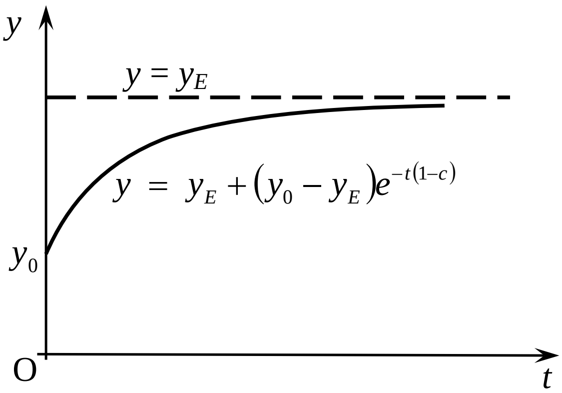


Рисунок 3.3. Переходный процесс в динамической модели Кейнса.

Полученные результаты можно интерпретировать так: если в экономике спрос на инвестиции изменится от величины I_0 (при $t = 0$) до величины $I > I_0$, то возникнет переходный процесс изменения ВВП от значения $y_0 = \dfrac{C+I_0}{1-c}$ до значения $y_E = \dfrac{C+I}{1-c}$.

3.2.3 Экономика в форме модели Самуэльсона-Хикса как линейное динамическое звено второго порядка

Модель Самуэльсона-Хикса отличается от динамической модели Кейнса введением в соотношение (3.26) акселератора (3.23):

$$I(t) = r\cdot\left(y(t) - y(t-1)\right) + I,$$

где r ($0 < r < 1$) – коэффициент акселерации (показывает величину изменения инвестиций при увеличении ВВП на единицу). С учетом этого соотношения получим:

$$y(t+1) = \underline{C} + c \cdot y(t) + r \cdot (y(t) - y(t-1)) + I\ ,$$

или

$$y(t+1) - 2y(t) + y(t-1) = \underline{C} + I - (1-c)y(t) - (1-r)(y(t) - y(t-1)),$$

$0 < c < 1,\ 0 \le r < 1.$

Перейдем, как и в модели (3.26), от дискретности по времени в 1 год к дискретности Δt:

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} - \frac{y(t) - y(t-\Delta t)}{\Delta t} =$$

$$= (\underline{C} + I - (1-c)y(t)) - (1-r)\frac{y(t) - y(t-\Delta t)}{\Delta t},$$

или

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} + (1-r)\frac{\Delta y}{\Delta t} + (1-c)y = \underline{C} + I\,.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (1-r)\frac{dy}{dt} + (1-c)y = \underline{C} + I\,,$$

или, в стандартной форме,

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C} + I}{1-c}. \qquad (3.28)$$

Это уравнение линейного динамического звена второго порядка.

Уравнение (3.28) имеет частное решение $y = y_E = \dfrac{\underline{C} + I}{1-c}$. Найдем общее решение соответствующего ему однородного уравнения. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{1-c} \cdot \lambda^2 + \frac{1-r}{1-c} \cdot \lambda + 1 = 0,$$

или

$$\lambda^2 + (1-r) \cdot \lambda + 1 - c = 0\,.$$

- При выполнении условия $(1-r)^2 - 4(1-c) > 0$, т. е. $r < 1 - 2\sqrt{1-c}$ корни этого уравнения действительны и отрицательны:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}.$$

В этом случае экономика ведет себя как два последовательно соединенных инерционных звена с постоянными времени

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

(пояснения см. в приложении II).

Общее решение уравнения (3.28) имеет вид

$$y(t) = y_E + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где $\lambda_{1,2} = -\frac{1-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}$, $y_E = \frac{\underline{C} + I}{1-c}$.

При $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_E .$$

- Если $(1-r)^2 - 4(1-c) < 0$, т. е. $r < 1 - 2\sqrt{1-c}$, то характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \qquad \alpha = -\frac{1-r}{2}, \quad \beta = \sqrt{(1-c) - \left(\frac{1-r}{2}\right)^2} .$$

Общее решение уравнения (3.28) имеет вид

$$y(t) = y_E + e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right).$$

При выполнении условия $0 \le r < 1$ действительная часть корней $\alpha < 0$ и, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} y = y_E .$$

Экономика ведет себя как колебательное звено (гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой).

3.2.4 Исследование линейных динамических систем управления с помощью передаточных функций

Для исследования линейных динамических систем в теории управления используется операторная запись уравнений, описывающих эти системы, и построенные на ее основе передаточные функции. Основные сведения о передаточных функциях линейных систем управления приведены в приложении II. В данном разделе рассматривается пример применения этого аппарата к исследованию экономической системы, описываемой динамической моделью Кейнса.

В 3.2.2 была построена модель экономики в форме уравнения инерционного звена (3.27). Вернемся к рассмотрению этой модели. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ экономическая система находилась в состоянии равновесия с $y_0 = \dfrac{\underline{C} + I_0}{1-c}$. После этого инвестиции увеличились от I_0 до $I_0 + \Delta I$, $\Delta I > 0$. Тогда правую часть уравнения (3.27) можно записать в виде

$$\frac{\underline{C} + I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{1-c} = y_0 + x, \quad x = \frac{\Delta I}{1-c}.$$

В свою очередь, решение уравнения (3.27) также может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$y(t) = y_0 + \frac{\Delta I}{1-c} - \frac{\Delta I}{1-c} e^{-t(1-c)} = y_0 + x\left(1 - e^{-t(1-c)}\right).$$

Таким образом, переходный процесс описывается уравнением

$$y(t) = y_0 + \eta(t),$$

где $\eta(t)$ – переменная часть переходного процесса, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \eta = x \cdot 1(t) \tag{3.29}$$

при нулевом начальном условии $\eta(0) = 0$; $1(t)$ – функция, определяющая единичное ступенчатое воздействие:

$$1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

Уравнение (3.29) может быть представлено в операторной форме:

$$\left(\frac{p}{1-c} + 1\right)\eta = 1$$

(см. приложение II), поэтому передаточная функция инерционного звена, определяемого этим уравнением, имеет вид

$$W(p) = \frac{1}{\frac{1}{1-c} \cdot p + 1}.$$

Модель (3.29) описывает разомкнутую систему, структурная схема которой показана на рис. 3.4. Эта система характеризуется отсутствием обратной связи.

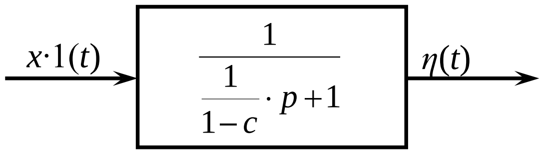


Рисунок 3.4. Структурная схема разомкнутой системы (3.29).

Введем в рассматриваемую систему мультипликатор с коэффициентом усиления $\alpha > 0$ в качестве звена обратной связи. Структурная схема полученной системы с обратной связью показана на рис. 3.5.

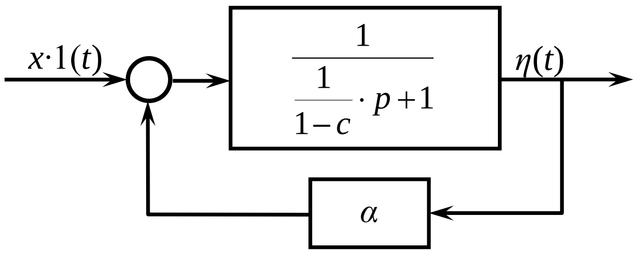


Рисунок 3.5. Структурная схема замкнутой системы, полученной при включении мультипликатора в контур обратной связи.

Передаточная функция замкнутой системы (см. приложение II) имеет вид

$$W_{\text{ос}}(p) = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-c}\cdot p+1}}{1\mp\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{1-c}\cdot p+1}} = \frac{1}{\dfrac{1}{1-c}\cdot p+1\mp\alpha}.$$

В этой формуле знак «–» соответствует положительной обратной связи (выход мультипликатора добавляется к входному воздействию), «+» – отрицательной (выход мультипликатора вычитается из входного воздействия).

Характеристическое уравнение системы с передаточной функцией $W_{\text{ос}}(p)$ имеет вид

$$\frac{1}{1-c}\cdot\lambda+1\mp\alpha = 0.$$

Тогда

$$\eta(t) = \frac{\Delta I}{(1\mp\alpha)(1-c)}\left(1-e^{-(1\mp\alpha)(1-c)t}\right),$$

и

$$y(t) = y_0+\eta(t) = \frac{C+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{(1\mp\alpha)(1-c)}\left(1-e^{-(1\mp\alpha)(1-c)t}\right).$$

После завершения переходного процесса будет достигнуто установившееся значение

$$\lim_{t\to\infty}y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{C+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{(1\mp\alpha)(1-c)}\left(1-e^{-(1\mp\alpha)(1-c)t}\right)\right) = \frac{C+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{(1\mp\alpha)(1-c)}.$$

Результаты проведенного исследования – значения ВВП, инвестиций и потребления в установившемся режиме при первоначальном значении инвестиций, при $I_0+\Delta I$, а также при наличии положительной и отрицательной обратной связи собраны в таблице 3.5.

Таблица 3.5

Инвестиции, ВВП и потребление в динамической модели Кейнса.

	Начальные значения	Установившиеся значения		
		Без обратной связи	С положительной обратной связью	С отрицательной обратной связью
Инвестиции	I_0	$I_0 + \Delta I$	$I_0 + \frac{\Delta I}{1-\alpha}$	$I_0 + \frac{\Delta I}{1+\alpha}$
ВВП	$\frac{\underline{C} + I_0}{1-c}$	$\frac{\underline{C} + I_0 + \Delta I}{1-c}$	$\frac{\underline{C} + I_0 + \frac{\Delta I}{1-\alpha}}{(1-c)}$	$\frac{\underline{C} + I_0 + \frac{\Delta I}{1+\alpha}}{(1-c)}$
Потребление	$\frac{\underline{C} + cI_0}{1-c}$	$\frac{\underline{C} + c(I_0 + \Delta I)}{1-c}$	$\frac{\underline{C} + c\left(I_0 + \frac{\Delta I}{1-\alpha}\right)}{(1-c)}$	$\frac{\underline{C} + c\left(I_0 + \frac{\Delta I}{1+\alpha}\right)}{(1-c)}$

На основании анализа данных таблицы 3.5 можно сделать следующие выводы.

- Введение мультипликатора $0 < \alpha < 1$ в контур положительной обратной связи приводит к более высоким приростам ВВП, инвестиций и потребления, но при этом переходный процесс становится более длительным:

$$T = \frac{1}{1-c} < \frac{T}{(1-\alpha)} = \frac{1}{(1-c)(1-\alpha)}.$$

- При введении отрицательной обратной связи приросты ВВП, инвестиций и потребления ниже, чем при отсутствии обратной связи, но переходный период протекает быстрее:

$$T = \frac{1}{1-c} > \frac{T}{(1+\alpha)} = \frac{1}{(1-c)(1+\alpha)}.$$

3.2.5 Устойчивость систем, описываемых динамическими моделями Кейнса и Самуэльсона-Хикса

Определение и основное условие устойчивости линейных динамических систем управления приведены в приложении III. Применим эти сведения к изучению рассмотренных выше моделей (3.27) и (3.28).

Характеристическое уравнение системы (3.27)

$$\frac{1}{1-c}\cdot\lambda+1 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda=-(1-c)$.

Этот корень является действительным, причем при 0 < c < 1 – отрицательным, поэтому экономика в форме динамической модели Кейнса является устойчивой.

Характеристическое уравнение системы (3.28) имеет вид:

$$\frac{1}{1-c}\cdot\lambda^2+\frac{1-r}{1-c}\cdot\lambda+1 = 0.$$

Как было показано в 3.2.3, корни этого уравнения λ_1 и λ_2 могут быть действительными или комплексно-сопряженными в зависимости от знака выражения $(1-r)^2-4(1-c)$.

В первом случае, когда $(1-r)^2-4(1-c)\geq 0$, корни действительные и

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1-r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2-(1-c)}.$$

Легко видеть, что при $0 < r < 1$ оба корня отрицательны.

Во втором случае, когда $(1-r)^2-4(1-c)<0$, корни комплексные и

$$\lambda_{1,2} = \alpha\pm i\beta, \qquad \alpha=-\frac{1-r}{2}, \quad \beta=\sqrt{(1-c)-\left(\frac{1-r}{2}\right)^2}.$$

Действительные части корней

$$\operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2= \alpha = -\frac{1-r}{2}$$

отрицательны при 0 < r < 1. Поэтому при этом условии, в соответствии с основным условием устойчивости, экономика в форме модели Самуэльсона-Хикса является устойчивой.

В случае, когда коэффициент акселерации $r > 1$, экономическая система становится неустойчивой: при положительном дискриминанте имеется монотонно увеличивающаяся неустойчивость; при отрицательном – неустойчивость в виде автоколебаний с экспоненциально возрастающей амплитудой.

Подведем итог:

- экономика в форме динамической модели Кейнса является устойчивой ($0 < c < 1$);
- экономика в форме модели Самуэльсона-Хикса является устойчивой ($0 < c < 1$, $0 < r < 1$).

Задания для самостоятельного выполнения

***Задание* 1.**

Путем обработки имеющихся статистических данных об изменении ВВП (в сопоставимых ценах) в течение некоторого периода получены точечные оценки параметров модели Самуэльсона-Хикса: совокупный автономный спрос $\underline{C} + I = 40{,}39$; предельная склонность к потреблению c = 0,61 и коэффициент акселерации r = 0,57. Решить задачу краткосрочного прогнозирования динамики ВВП на основе уравнения Хикса. Для этого выполнить следующие действия.

1. Построить модель Самуэльсона-Хикса динамики ВВП.
2. Задав начальные условия Y_0 = 110,45 и Y_1 = 98,18 (млрд. ден. ед.), определить прогнозируемое значение Y_2 и сравнить его с имеющимися данными наблюдений $Y_2^{\text{набл}}$ = 94,34 (млрд. ден. ед). Найти абсолютную и относительную погрешность моделирования и сделать вывод.
3. Составить алгоритм решения уравнения Хикса.
4. Найти ВВП как функцию времени (t = 0, 1, 2. …) и построить ее график.
5. Проанализировать динамику изменения ВВП: является ли она растущей или затухающей, имеет ли колебательный характер; определить установившееся значение ВВП (если оно существует).

***Задание* 2.**

Выполнить анализ магистральной модели накопления M_{DL}, заданной следующими исходными данными:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1269 & 0{,}0695 \\ 0{,}2312 & 0{,}4884 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0{,}2170 & 0{,}0033 \\ 1{,}7287 & 0{,}6067 \end{pmatrix},$$

$$\overline{h} = \begin{pmatrix} -0{,}0142 \\ 0{,}3589 \end{pmatrix}, \quad \overline{v} = \begin{pmatrix} 0{,}6591 \\ 0{,}3351 \end{pmatrix}.$$

В ходе анализа выполнить следующее.

1. Показать, что в модели M_{DL} существует магистраль.
2. Найти темп роста магистрали, соотношение, определяющее магистраль, и неймановский луч.
3. Убедиться, что векторы $\overline{x}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ определяют допустимые начальные состояния.
4. Задать $T = 5$ и для каждого из начальных состояний $\overline{x}_0^{(1)}$ и $\overline{x}_0^{(2)}$ найти u-оптимальную траекторию, задав коэффициенты целевой функции, соответственно, $\overline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}97 \\ 0{,}30 \end{pmatrix}$ и $\overline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.
5. Выполнить графическую иллюстрацию к теореме о магистрали: на координатной плоскости $(O,\ x_1,\ x_2)$ изобразить неймановский луч данной модели и найденные u-оптимальные траектории. Сделать выводы.

***Задание* 3.**

Используя оценки параметров модели Самуэльсона-Хикса (совокупный автономный спрос $\underline{C} + I$, предельная склонность к потреблению c и коэффициент акселерации r), данные в задании 1, проанализировать переходный процесс при изменении инвестиций от некоторого начального уровня I_0 (соответствует начальному значению ВВП Y_0) до заданного уровня I. В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Построить модель динамики ВВП в виде линейного динамического звена второго порядка.
2. Составить алгоритм построения общего решения полученного уравнения,

а также его частного решения при известных значениях Y_0 и Y_1.

3. Найти ВВП как функцию времени и построить ее график.
4. Получить динамику изменения ВВП, соответствующую значениям Y_0 и Y_1, данным в задании 1, и ее графическое представление.
5. Сопоставить эти результаты с результатами, полученными при выполнении задания 1.
6. Выяснить, является ли экономика устойчивой; определить установившееся значение ВВП (если оно существует).

***Задание* 4**.

Исследовать поведение экономики в форме модели Кейнса при включении в контур положительной обратной связи акселератора. В ходе проведения исследования выполнить следующее.

1. Построить структурную схему замкнутой системы с акселератором, включенным в контур положительной обратной связи.
2. Найти передаточную функцию замкнутой системы.
3. Получить соотношение, описывающее динамику ВВП.
4. Найти установившееся значение ВВП (если оно существует).
5. На основании результатов, полученных в п. 3 и 4, сделать выводы о том, как влияет введение акселератора в контур положительной обратной связи на динамику ВВП и характер переходного процесса.

4. Нелинейные динамические модели макроэкономики.

В предыдущих разделах был рассмотрен ряд линейных многоразмерных макроэкономических моделей – модели В. Леонтьева, магистральные модели. Однако для многих экономических процессов и явлений характерна нелинейность. Исследование нелинейных многомерных моделей обычно сопряжено с большими трудностями. Аналитическое исследование таких моделей, с одной стороны, могло бы дать полную картину поведения исследуемой системы при любых значениях параметров, но с другой стороны, может оказаться очень трудоемким и не всегда выполнимым из-за сложности модели. Имитационное моделирование может выполняться и для сложных систем, но позволяет получить лишь ряд фрагментов общей картины при отдельных значениях параметров.

В связи с этим, для исследования долговременных тенденций, оценки последствий различных вариантов управления макроэкономическими системами применяются нелинейные *малосекторные* модели. При построении таких моделей используется следующий подход: структура экономической системы представляется секторами, каждый из которых производит один агрегированный продукт. При небольшом числе секторов удается аналитически исследовать нелинейные зависимости выпусков секторов от затрат ресурсов.

Наиболее широко известна *односекторная модель Солоу*, предложенная американским экономистом, нобелевским лауреатом Р. Солоу.

Двухсекторная модель впервые была на концептуальном уровне рассмотрена К. Марксом в труде «Капитал». В настоящее время она достаточно подробно исследована и как математическая модель (см., например, [13]). В этой модели два агрегированных продукта: средства производства и предметы потребления, и два сектора, которые производят эти продукты (соответственно, первое и второе подразделения).

В [1] достаточно подробно рассматривается *трехсекторная модель* экономики, в которой используются три агрегированных продукта: предметы труда, средства труда и предметы потребления. Эти продукты производятся тремя секторами: материальный сектор (нулевой) производит предметы труда, фондосоздающий сектор (первый) – средства труда, потребительский сектор (второй) – предметы потребления.

В качестве базовой модели (отправной точки для построения и анализа нелинейных малосекторных моделей) в современной литературе обычно используется односекторная модель Солоу. Далее будет рассмотрена эта модель.

4.1 Модель Солоу

Базовые предположения.

В односекторной модели Солоу экономическая система рассматривается как неструктурированное целое, она производит один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Экспорт и импорт в явном виде в рамках этой модели не учитываются.

Состояние экономической системы в данной модели определяется пятью эндогенными переменными:

X – валовой внутренний продукт;

C – фонд непроизводственного потребления;

I – инвестиции;

L – число занятых в производстве;

K – капитал (ОПФ).

Предполагается, что все эти величины изменяются во времени (аргумент t не указан, но он подразумевается).

В качестве экзогенных (входных, заданных вне системы) переменных используются следующие показатели:

ν – годовой темп прироста числа занятых;

μ – доля выбывших за год ОПФ;

ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в ВВП);

$$-1 < \nu < 1,\ 0 < \mu < 1,\ 0 < \rho < 1.$$

Экзогенные показатели считаются постоянными во времени. Предполагается, что норма накопления является управляющим параметром: в начальный момент времени устанавливается управляющими органами системы.

Время t в модели Солоу считается непрерывным и измеряется в годах. Для показателей $L = L(t)$ и $K = K(t)$ это естественно, т. к. их значения могут быть установлены в любой момент времени. Для потоковых показателей $X = X(t)$, $I = I(t)$ и $C = C(t)$ используется следующий прием. Значение t представляется в виде $t = [t] + \{t\}$, где $[t]$ – целое число лет, $\{t\}$ – число дней, прошедших с начала текущего года. Показатели $X = X(t)$, $I = I(t)$ и $C = C(t)$ определяются в виде накопленных за год, начинающийся на $\{t\}$ дней позднее 1 января предшествующего года.

Годовой выпуск в каждый момент времени описывается производственной функцией $X = F(K, L)$, относительно которой в модели приняты следующие предположения:

- ПФ является неоклассической;
- ПФ является однородной первого порядка, т. е. удовлетворяет условию

$$X = F(K, L) = L \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L \cdot f\left(\frac{K}{L}\right).$$

Этим предположениям удовлетворяет, например, ПФ Кобба-Дугласа (2.3).

Основные соотношения модели.

Определим величину изменения затрат ресурсов за небольшой промежуток времени Δt.

- Изменение числа занятых.

По определению темпа прироста, $\dfrac{\Delta L}{L} = \nu \cdot \Delta t$, или

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \nu \cdot L. \qquad (4.1)$$

- Изменение капитала.

Износ ОПФ и инвестиции в расчете на год равны $\mu \cdot K$ и I

соответственно; за время Δt – соответственно $\mu \cdot K \cdot \Delta t$ и $I \cdot \Delta t$.

Поэтому прирост ОПФ за это время составит

$$\Delta K = -\mu \cdot K \cdot \Delta t + I \cdot \Delta t. \tag{4.2}$$

В равенстве (4.1) перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dL}{dt} = \nu \cdot L.$$

После разделения переменных $\dfrac{dL}{L} = \nu\, dt$ и интегрирования:

$$\ln L = \nu \cdot t + \ln A,$$

откуда

$$L = A \cdot e^{\nu t},$$

где A – произвольная постоянная. Используя начальное условие $L(0) = L_0$, определим значение $A = L_0$, и окончательно получим

$$L = L_0 \cdot e^{\nu t}. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) определяет функцию предложения труда в модели Солоу.

В равенстве (4.2) также перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu \cdot K + I. \tag{4.4}$$

Линейное дифференциальное уравнение (4.4) вместе с начальным условием $K(0) = K_0$ определяет динамику ОПФ в модели Солоу.

Инвестиции и фонд потребления выражаются через ВВП следующими соотношениями:

$$I = \rho \cdot X, \quad C = (1 - \rho) \cdot X. \tag{4.5}$$

Собрав вместе соотношения (4.3) – (4.5), а также формулу, определяющую ПФ, получим *модель Солоу в абсолютных показателях*:

$$\begin{aligned} &L = L_0 e^{\nu t}; \qquad \frac{dK}{dt} = -\mu \cdot K + \rho \cdot X, \quad K(0) = K_0; \\ &X = F(K, L); \qquad I = \rho \cdot X; \qquad C = (1 - \rho) X. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Общая схема функционирования экономики в соответствии с моделью Солоу показана на рис. 4.1.

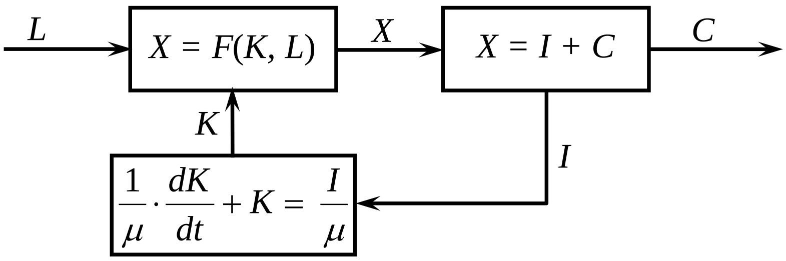


Рисунок 4.1. Схема функционирования экономики согласно модели Солоу.

На входе системы – число занятых L, на выходе – объем фонда потребления C. В структуре системы присутствует контур обратной связи, включающий нелинейный статический элемент $X = F(K, L)$, распределительное линейное статическое звено $X = I + C$ и инерционное звено $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dK}{dt}+K = \frac{I}{\mu}$. Присутствие в системе нелинейного элемента требует отнести эту систему к классу нелинейных систем.

Для удобства изучения модели в уравнениях (4.6) переходят от абсолютных к удельным показателям

$$x = \frac{X}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k), \quad k = \frac{K}{L};$$

$$c = \frac{C}{L} = (1-\rho)x; \qquad i = \frac{I}{L} = \rho\cdot x;$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(kL) = k\nu L + L\frac{dk}{dt}.$$

При вычислении производной $\frac{dK}{dt}$ было использовано правило дифференцирования произведения.

Окончательно *модель Солоу в удельных показателях* принимает вид:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda\cdot k + \rho\cdot f(k), \quad \lambda = \mu + \nu, \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0};$$
$$x = f(k); \qquad i = \rho\cdot f(k); \qquad c = (1-\rho)f(k). \tag{4.7}$$

В уравнениях (4.7), в отличие от (4.6), все функции имеют только один аргумент k. Величина $k=\dfrac{K}{L}$, как уже отмечалось в разделе 2.1, называется фондовооруженностью.

Если рассматривать изменение абсолютных или относительных показателей во времени, то можно говорить о траектории системы в абсолютных или относительных показателях.

Траектория развития, удовлетворяющая уравнениям (4.7), называется *стационарной*, если

$$k(t) = k_E = const.$$

Замечание. Как следует из (4.7), на стационарной траектории постоянными являются и другие показатели:

$$x = x_E = f(k_E); \quad i = i_E = \rho \cdot f(k_E); \quad c = c_E = (1-\rho) f(k_E).$$

Отсюда, собственно, и происходит термин «стационарная траектория».

На стационарной траектории $\dfrac{dk}{dt} = 0$, поэтому из первого уравнения (4.7)

$$-\lambda \cdot k_E + \rho \cdot f(k_E) = 0,$$

т. е. значение k_E может быть найдено как решение уравнения

$$\lambda \cdot k = \rho \cdot f(k). \tag{4.8}$$

С геометрической точки зрения это означает, что k_E – абсцисса точки пересечения графиков функций $g_1(k) = \lambda \cdot k$ и $g_2(k) = \rho \cdot f(k)$.

В соответствии с принятым предположением, ПФ $F(K, L)$ является неоклассической, поэтому можно утверждать, что для функции $f(k) = F\left(\dfrac{K}{L}, 1\right)$ справедливо $f(0) = 0$, $f' > 0$, $f'' < 0$. Отсюда следует, что при дополнительном предположении $\rho \cdot f'(0) > \lambda$ уравнение (4.8) имеет единственное ненулевое решение $k = k_E$, как это показано на рис. 4.2.

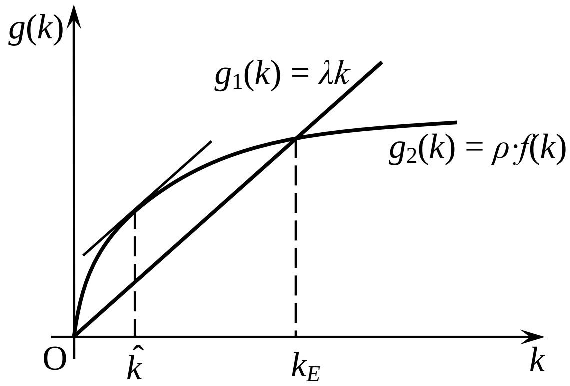


Рисунок 4.2. Графическое определение стационарной фондовооруженности.

На рис. 4.2 $\hat{k}$ обозначено значение фондовооруженности, при котором скорости роста функций $g_1(k)$ и $g_2(k)$ равны. Т. е. $\hat{k}$ – это корень уравнения

$$\rho \cdot f'(k) = \lambda.$$

Переходный режим в модели Солоу.

Если в (4.7) $k_0 = k_E$, то экономическая система с самого начала находится на стационарной траектории, и сойти с нее может только при изменении внешних условий. Такими изменениями могут быть, например, установление другого значения нормы накопления или переход к новым технологиям с изменением ПФ $F(K, L)$.

При $k_0 \neq k_E$ в экономической системе будет происходить переходный процесс, который должен закончиться установлением стационарного режима. В переходном процессе значение фондовооруженности в момент времени t определяется уравнением

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda \cdot k + \rho \cdot f(k), \quad k(0) = k_0, \qquad (4.9)$$

причем, при $k < k_E$ $\dfrac{dk}{dt} > 0$, при $k > k_E$ $\dfrac{dk}{dt} < 0$ (см. рис. 4.2).

Продифференцируем уравнение (4.9) по t:

$$\frac{d^2k}{dt^2} = -\lambda \frac{dk}{dt} + \rho \cdot \frac{d}{dt} f(k) = \frac{dk}{dt} \cdot \left(-\lambda + \rho \cdot f_k'(k)\right) \qquad (4.10)$$

(применено правило дифференцирования сложной функции). Из (4.10) следует:

при $k < \hat{k}$ $\quad \dfrac{d^2k}{dt^2} > 0$, поскольку $\dfrac{dk}{dt} > 0, \quad \lambda < \rho \cdot f_k'(k)$;

при $\hat{k} < k < k_E$ $\quad \dfrac{d^2k}{dt^2} < 0$, поскольку $\dfrac{dk}{dt} > 0, \quad \lambda > \rho \cdot f_k'(k)$;

при $k > k_E$ $\quad \dfrac{d^2k}{dt^2} > 0$, поскольку $\dfrac{dk}{dt} < 0, \quad \lambda > \rho \cdot f_k'(k)$.

Дальнейшее изучение переходного процесса требует более конкретной информации о функции $f(k)$. Будем проводить дальнейшие рассуждения для случая, когда ПФ $F(K, L)$ является функцией Кобба-Дугласа. В этом случае, в соответствии с (2.3), $F(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, поэтому

$$f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = A \cdot k^{\alpha}.$$

Уравнение (4.8) принимает вид

$$\lambda \cdot k = \rho \cdot A \cdot k^{\alpha},$$

откуда

$$k_E = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Условие $\rho \cdot f'(k) = \lambda$ принимает вид

$$\rho \cdot \alpha \cdot A \cdot k^{\alpha-1} = \lambda,$$

откуда

$$\hat{k} = \left(\frac{\rho \cdot A \cdot \alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Уравнение (4.9) имеет вид

$$\frac{dk}{dt} + \lambda \cdot k = \rho \cdot A \cdot k^{\alpha}, \quad k(0) = k_0.$$

Это дифференциальное уравнение Бернулли. Его общее решение может быть найдено с помощью подстановки Бернулли $k = u \cdot v$ либо заменой переменной $u = e^{\lambda t} \cdot k$. С учетом начального условия решением данного уравнения является функция

$$k(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda} \cdot e^{\lambda(1-\alpha)t} + k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Преобразуем ее:

$$k(t) = \left(e^{-\lambda(1-\alpha)t}\left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda} \cdot e^{\lambda(1-\alpha)t} + k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda} + e^{-\lambda(1-\alpha)t} \cdot \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left(k_E^{1-\alpha} + e^{-\lambda(1-\alpha)t} \cdot \left(k_0^{1-\alpha} - k_E^{1-\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

При $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \lim_{t\to\infty}\left(k_E^{1-\alpha} + e^{-\lambda(1-\alpha)t} \cdot \left(k_0^{1-\alpha} - k_E^{1-\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(k_E^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_E .$$

Таким образом, переходный процесс заканчивается установлением стационарного режима $k = k_E$.

Как следует из (4.10), возможны три типа переходного процесса относительно характера изменения фондовооруженности.

1. Начальное значение фондовооруженности удовлетворяет условию $k_0 < \hat{k}$. В этом случае при $0 < k < \hat{k}$ имеет место $\frac{dk}{dt} > 0$, $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$; при $k > \hat{k}$ – $\frac{dk}{dt} > 0$, $\frac{d^2k}{dt^2} < 0$. Это означает, что ускоренный рост фондовооруженности, наблюдаемый на начальном этапе, после достижения значения $\hat{k}$ сменяется замедленным ростом.
2. Начальное значение фондовооруженности удовлетворяет условию $\hat{k} < k_0 < k_E$. В этом случае имеет место $\frac{dk}{dt} > 0$, $\frac{d^2k}{dt^2} < 0$, и, следовательно, замедленный рост фондовооруженности.
3. Начальное значение фондовооруженности удовлетворяет условию

$k_0 > k_E$. В этом случае имеет место $\frac{dk}{dt} < 0$, $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$, т. е. замедляющееся падение фондовооруженности («проедание» фондов). Все три типа переходного процесса показаны на рис. 4.3.

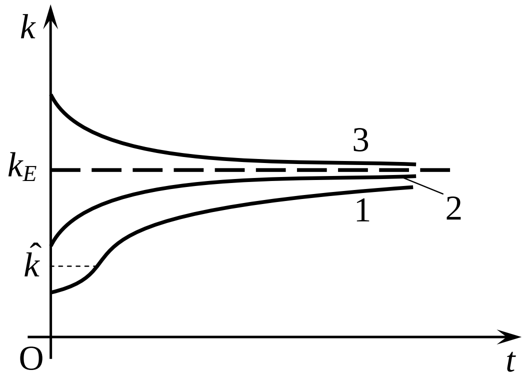


Рисунок 4.3. Типы переходного процесса в модели Солоу с ПФ Кобба-Дугласа.

При $\hat{k} < k_0 < k_E$ имеет место достаточно короткий переходный процесс (текущее и стационарное значение k мало отличаются уже через относительно небольшой промежуток).

Поведение относительных показателей x, i и c аналогично поведению k, т. к. они пропорциональны k^{α}.

Золотое правило накопления.

В начале данного раздела отмечалось, что норма накопления является управляющим параметром в модели Солоу. Важнейший вопрос состоит в том, какое значение этого параметра позволит максимизировать среднедушевое потребление в стационарном режиме. Ответ на этот вопрос и составляет суть «золотого правила накопления».

Из (4.7)

$$c = (1-\rho)f(k) = (1-\rho)\cdot A\cdot k^{\alpha},$$

поэтому

$$c_E(\rho) = (1-\rho)\cdot A\cdot k_E^{\alpha} = (1-\rho)\cdot A\cdot\left(\frac{\rho\cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = B\cdot(g(\rho))^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

где

$$B = \left(\frac{A}{\lambda^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad g(\rho) = \rho^{\alpha} \cdot (1-\rho)^{1-\alpha}.$$

Отсюда видно, что среднедушевое потребление целиком определяется функцией $g(\rho)$. Исследуем поведение этой функции.

$$\frac{dg}{d\rho} = \alpha \cdot \rho^{\alpha-1}(1-\rho)^{1-\alpha} - \rho^{\alpha}(1-\alpha)\cdot(1-\rho)^{-\alpha} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\alpha-\rho}{\rho}.$$

Функция $g(\rho)$ имеет критическую точку $\rho^* = \alpha$, причем

при $\rho < \alpha$ $\quad \frac{dg}{d\rho} > 0$, и, следовательно, $\frac{dc_E}{d\rho} > 0$;

при $\rho > \alpha$ $\quad \frac{dg}{d\rho} < 0$, и, следовательно, $\frac{dc_E}{d\rho} < 0$,

т. е. $\rho^* = \alpha$ – точка максимума функции $c_E(\rho)$.

Отсюда вывод: наибольшее среднедушевое потребление достигается при $\rho^* = \alpha$, т. е. *норма накопления должна быть равна эластичности выпуска по фондам*.

На практике норма накопления всегда меньше своего оптимального значения (имеет место $\rho < \alpha$ – недонакопление). Графическая иллюстрация к проведенному анализу показана на рис. 4.4.

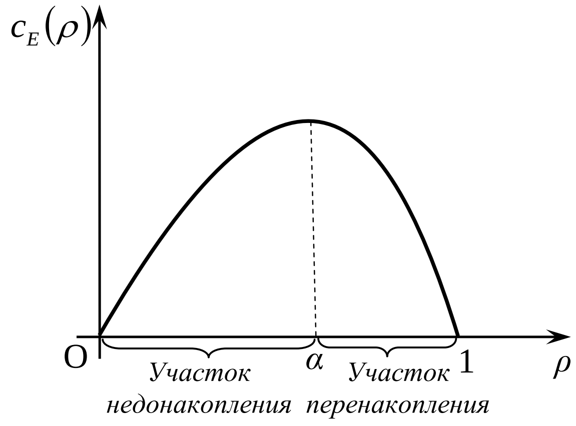


Рисунок 4.4. Удельное потребление как функция нормы накопления.

Задания для самостоятельного выполнения

***Задание* 1.**

Экономическая система описывается односекторной моделью Солоу с ПФ Кобба-Дугласа, параметры которой равны A = 1,531 и α = 1/2. Параметры модели Солоу определены следующим образом: норма накопления ρ = 0,2; выбытие фондов за год μ = 0,2; годовой прирост трудовых ресурсов ν = 0,05. Используя начальное условие $k(0) = 2\hat{k}$ (значение $\hat{k}$ найти по заданным параметрам модели), проанализировать динамику фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления в переходном режиме и определить значения указанных показателей на стационарной траектории. В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Составить уравнения односекторной модели Солоу для описанной в условии экономической системы.
2. Получить соотношения, описывающие динамику фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления в переходном режиме. Найти значения этих показателей как функции времени, построить графики этих функций и определить стационарные значения показателей.
3. На основании результатов, полученных в п. 2, охарактеризовать тип сходимости указанных показателей к своим стационарным значениям.

***Задание* 2.**

Построить модель Солоу для случая, когда ПФ является линейно-однородной CES-функцией:

$$F(K, L) = A \cdot \left(u \cdot K^{-\beta} + (1-u) \cdot L^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}},$$

где $A > 0$, $0 < u < 1$, $\beta > -1$.

5. Математические модели микроэкономики

5.1 Модели поведения потребителей

В основе принятия решений по управлению производственной и сбытовой деятельностью предприятий лежит анализ рыночной информации. При этом начальным пунктом всего цикла предпринимательской деятельности становится изучение потребительского спроса. В данном подразделе рассматриваются некоторые базовые вопросы моделирования спроса и потребления.

5.1.1 Модель поведения потребителя на основе теории полезности

Главная задача при изучении поведения потребителя – установить, в каких объемах он приобретет наличные товары и услуги при заданных ценах и доходе.

Предпочтения потребителя и функция полезности.

Товаром будем называть некоторое благо или услугу, поступившие в продажу в определенное время в определенном месте. Пусть рассматривается конечное число n товаров, доступных потребителю. Представляют интерес объемы этих товаров, приобретаемые потребителем за определенный срок (например, за год) при заданных ценах и доходе, полученном за этот же срок.

Обозначим:

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – объемы товаров, приобретенных потребителем за определенный срок.

Пространством товаров ***C*** будем называть множество всевозможных векторов $\bar{x}$ с неотрицательными компонентами:

$$C = \left\{ \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \middle| x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Конкретное решение потребителя о покупке определенного набора товаров математически может быть представлено как выбор конкретной точки в пространстве C.

Теория потребительского выбора строится на основе ряда предположений о системе предпочтений потребителя. Так, предполагается, что каждый потребитель изначально имеет свои предпочтения на некотором подмножестве X пространства товаров C. Формально это означает, что каждая пара наборов товаров $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in X$ состоит в одном из трех отношений:

$\bar{x} \succ \bar{y}$ – набор $\bar{x}$ более предпочтителен, для потребителя, чем набор $\bar{y}$;

$\bar{x} \prec \bar{y}$ – набор $\bar{x}$ менее предпочтителен, для потребителя, чем набор $\bar{y}$;

$\bar{x} \sim \bar{y}$ – наборы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ имеют одинаковую степень предпочтения для потребителя.

Предполагается, что отношения предпочтения обладают следующими двумя свойствами.

1) *Транзитивность*. Для любых $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in X$, $\bar{z} \in X$ справедливо

$$\text{если } \bar{x} \succ \bar{y} \text{ и } \bar{y} \succ \bar{z}, \text{ то } \bar{x} \succ \bar{z}.$$

2) *Ненасыщаемость*. Бóльший набор всегда предпочтительнее меньшего:

$$\text{если } \bar{x} > \bar{y}, \text{ то } \bar{x} \succ \bar{y}.$$

Отношение предпочтения $\succ$ называется *непрерывным на множестве* X, если множество $\{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{x} \succ \bar{y}\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \times X$. В упрощенном виде это интерпретируется так: если набор товаров $\bar{x}_0$ предпочтительнее набора $\bar{y}_0$, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение предпочтения сохраняется.

Для проведения количественного анализа необходимо представить предпочтения каждого потребителя в количественной форме, т. е. задать некоторую числовую функцию u, которая каждому набору товаров $\bar{x}$ ставила бы в соответствие число $u(\bar{x})$ – степень предпочтительности этого набора.

Функция $u(\bar{x})$, определенная на множестве X, и обладающая свойствами:

- из $\bar{x} \succ \bar{y}$ следует $u(\bar{x}) > u(\bar{y})$,

- из $\bar{x} \sim \bar{y}$ следует $u(\bar{x}) = u(\bar{y})$,

называется *функцией полезности* потребителя.

Теорема Дебре. Если множество X связно, а отношение предпочтения $\succ$ непрерывно, то функция полезности существует.

Замечание. Функция полезности определяется неоднозначно. Например, если для потребителя построена функция $u(\bar{x})$, обладающая указанными выше свойствами, то функции $C \cdot u(\bar{x})$, $\ln(u(\bar{x}))$ и др. также будут обладать этими свойствами, и, следовательно, могут быть использованы в качестве количественного индикатора предпочтений потребителя (т. е. функции полезности).

Еще одно важное предположение, лежащее в основе теории потребления, состоит в том, что функция полезности потребителя является гладкой и обладает следующими четырьмя свойствами [1].

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

при увеличении потребления блага полезность возрастает;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение практически не приводит к увеличению полезности.

Замечание. В процессе построения теории свойство 3) иногда используется в расширенной формулировке, а именно: матрица, составленная из вторых частных производных функции полезности (матрица Гессе)

$$U = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,\, j = 1, \ldots, n}$$

должна быть отрицательно определена[8].

Предельная полезность. Предельная норма замены товаров.

Предельной полезностью товара i называется величина

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_i}.$$

Она показывает, насколько возрастает полезность набора товаров, если потребление i-го товара возрастает на малую величину, при условии фиксированных уровней потребления остальных товаров.

Поверхностью безразличия называется гиперповерхность, определяемая уравнением

$$u(\bar{x}) = C = const\,.$$

Это уравнение может быть записано в дифференциальной форме:

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot dx_i = 0. \qquad (5.1)$$

При $n = 2$ поверхности безразличия называются *кривыми безразличия*.

Пример. Рассмотрим пространство двух товаров $\left\{ \bar{x} = (x_1,\, x_2)^T \,\middle|\, x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0 \right\}$, на котором задана функция полезности потребителя $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 \cdot (x_2 + 2)}$. Кривые безразличия определяются уравнениями

$$\sqrt{x_1 \cdot (x_2 + 2)} = C = const$$

или

[8] Матрица U называется отрицательно определенной, если для любого вектора $\bar{x} \ne \bar{0}$ выполняется $\bar{x}^T \cdot U \cdot \bar{x} < 0$.

$$x_2 = \frac{C^2}{x_1} - 2.$$

Несколько кривых (при C = 10, 15, 20 и 25) показаны на рис. 5.1.

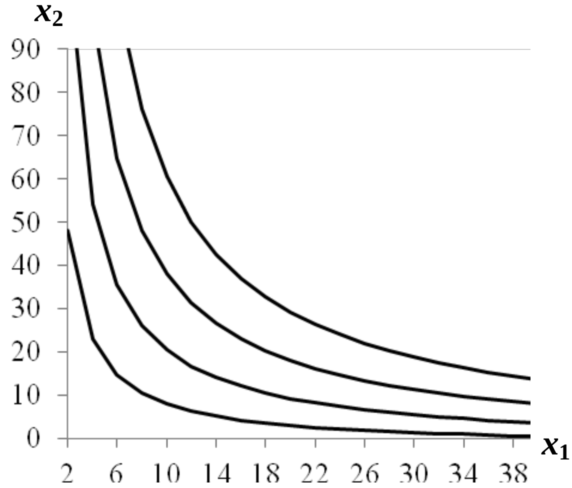


Рисунок 5.1. Кривые безразличия для функции полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 \cdot (x_2 + 2)}$.

Точки, лежащие на одной поверхности (кривой) безразличия, соответствуют наборам товаров, имеющим для потребителя одинаковую полезность. Наличие множества таких наборов означает возможность замены одного набора товаров другим (равноценным для потребителя) набором; в том числе – возможность замены одного товара другим.

Предположим, что в пространстве товаров размерности n уровень потребления всех товаров, кроме товаров j и k, постоянен. В этом случае в уравнении (5.1) $\mathrm{d}x_i = 0$ при $i \neq j$ и $i \neq k$. Тогда из (5.1) следует

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot dx_j + \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot dx_k = 0,$$

откуда

$$-\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_k}}.$$

Предельная норма замены j-го товара k-м товаром равна отношению предельных полезностей j-го и k-го товаров. Эта величина характеризует количество единиц *k*-го товара, необходимых для замены одной единицы *j*-го товара без изменения полезности набора товаров.

Модель поведения потребителя.

Обозначим: $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вектор-строка цен на товары.

Бюджетным множеством E называется множество тех наборов товаров, которые может приобрести потребитель, имея доход M:

$$E = \left\{ \overline{x} \in C \middle| \overline{p} \cdot \overline{x} \le M \right\}.$$

В теории потребления предполагается, что поведение потребителя определятся его стремлением максимизировать полезность приобретаемого набора благ. Единственным сдерживающим условием является ограниченность дохода потребителя. Формально задача потребительского выбора может быть записана следующим образом:

$$\text{найти } \max_{\overline{x} \in E \cap X} u(\overline{x}).$$

Это задача математического программирования:

$$u(\overline{x}) \quad \to \quad \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \overline{p} \cdot \overline{x} \le M, \\ \overline{x} \in X. \end{cases}$$

В случае $E \subseteq X$ эта задача сводится к задаче нахождения условного максимума функции $u(\overline{x})$ при ограничении

$$\overline{p} \cdot \overline{x} = M.$$

Пояснение. В области $\overline{p} \cdot \overline{x} < M$ функция $u(\overline{x})$ не может иметь максимум, поскольку оставшаяся нереализованной часть дохода потребителя может быть использована для дополнительного приобретения благ. Тем самым, в соответствии с гипотезой ненасыщаемости, будет увеличена полезность приобретаемого набора.

Полученная задача условной максимизации эквивалентна задаче нахождения безусловного экстремума функции Лагранжа:

$$L(\overline{x}, \lambda) = u(\overline{x}) + \lambda(\overline{p} \cdot \overline{x} - M) \quad \to \quad \max.$$

Необходимые условия экстремума определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}^*) + \lambda^* \cdot p_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, & (5.2) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j^* = M. & (5.3) \end{cases}$$

В случае отрицательной определенности матрицы U эти условия являются также и достаточными условиями экстремума, причем они определяют точку максимума функции $u(\overline{x})$.

Из уравнений (5.2) следует, что оптимальный (при фиксированном доходе) набор товаров $\overline{x}^*$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}^*) : \frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}^*) : \ldots : \frac{\partial u}{\partial x_n}(\overline{x}^*) = p_1 : p_2 : \ldots : p_n. \qquad (5.4)$$

Разрешив систему уравнений (5.2) – (5.3) относительно $\overline{x}^*$, получим функцию

$$\overline{x}^* = \overline{x}^*(\overline{p}, M),$$

определяющую зависимость спроса потребителя на все виды товаров от уровней цен на эти товары и от величины дохода потребителя. Эта функция называется *функцией спроса* потребителя.

<u>Пример</u>. Вернемся к рассмотрению функции полезности потребителя $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 \cdot (x_2 + 2)}$, заданной в пространстве двух товаров. В предыдущем примере для этой функции были построены кривые безразличия. Предположим, что цены на товары заданы вектором $\overline{p} = (p_1, p_2)$, доход потребителя за рассматриваемый промежуток времени равен M. Найдем оптимальный для потребителя набор товаров.

В данном случае имеем задачу условной максимизации

$$\sqrt{x_1 \cdot (x_2 + 2)} \quad \to \quad \max$$

при ограничении

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = M,$$

которая сводится к задаче безусловной максимизации функции

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1 \cdot (x_2 + 2)} + \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - M).$$

Система уравнений (5.2) – (5.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{x_2 + 2}{x_1}} + \lambda \cdot p_1 = 0, \\ \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{x_1}{x_2 + 2}} + \lambda \cdot p_2 = 0, \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = M. \end{cases}$$

Выразим переменную λ из первого и второго уравнений и приравняем полученные выражения:

$$-\frac{1}{2p_1}\sqrt{\frac{x_2 + 2}{x_1}} = -\frac{1}{2p_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2 + 2}},$$

откуда

$$x_1 = \frac{p_2}{p_1}(x_2 + 2).$$

Подставим это выражение в третье уравнение системы и найдем x_2:

$$x_2 = \frac{M - 2p_2}{2p_2}.$$

Теперь осталось записать x_1 и окончательные выражения для функции спроса потребителя:

$$\bar{x}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{M + 2p_2}{2p_1} \\ \dfrac{M - 2p_2}{2p_2} \end{pmatrix}.$$

Эта функция и определяет оптимальный для данного потребителя набор товаров при заданных ценах на товары p_1, p_2 и величине дохода, равной M. Подставив вместо параметров p_1, p_2 и M конкретные числовые значения, можно определить и числовые значения оптимального количества потребляемых товаров.

Например, пусть цена на первый товар составляет 20 ден. ед., на второй товар – 50 ден. ед.; доход потребителя за рассматриваемый промежуток времени равен 1800 ден. ед. Тогда оптимальный для данного потребителя набор товаров включает

$$\overline{x}_1^* = \frac{M + 2p_2}{2p_1} = 47{,}5 \text{ (ед.) товара 1 и } \overline{x}_2^* = \frac{M - 2p_2}{2p_2} = 17 \text{ (ед.) товара 2.}$$

Проверим выполнение условия (5.4).

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}*) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x_2^* + 2}{x_1^*}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}*) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x_1^*}{x_2^* + 2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{p_2}{p_1}},$$

поэтому соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}*) : \frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}*) = p_1 : p_2$$

выполняется при любых значениях p_1, p_2 и M (в частности, при конкретных числовых значениях, использованных выше).

Рассмотрение примера закончено.

В основе построения моделей личного потребления лежит принцип распределения всех семей по группам на основе данных о распределении семейных бюджетов. При таком подходе население рассматривается как совокупность нескольких групп семей, однородных по уровням дохода и критериям принятия потребительских решений. Каждая такая группа характеризуется функцией полезности $u(\overline{x})$, уровнем дохода M, а, следовательно, и функцией спроса $\overline{x}* = \overline{x}*(\overline{p}, M)$.

5.1.2 Исследование функции спроса потребителя

Изменение спроса при изменении цен на товары.

Будем рассматривать пространство товаров размерности n и потребителя, характеризующегося некоторой функцией спроса

$$\overline{x}* = \overline{x}*(\overline{p}, M). \tag{5.5}$$

Цены $p_1, p_2, \dots, p_n$ будем рассматривать как переменные величины.

Предположим, что цена k-го товара изменилась на величину dp_k. При условии неизменности цен на остальные товары спрос на все товары, в соответствии с (5.5), изменится на величину

$$dx_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} \cdot dp_k\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Для получения величин $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_k}$ продифференцируем уравнения (5.2) и (5.3) по p_k. Из уравнений (5.2):

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}*) - \lambda * \cdot p_i\right) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Используя для первого слагаемого правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}*)\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}*)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\,,$$

а для второго слагаемого – соотношения

$$\frac{\partial}{\partial p_k}(\lambda * \cdot p_i) = \begin{cases} p_i \cdot \dfrac{\partial \lambda *}{\partial p_k} & \text{при } i \neq k\,, \\ \lambda * + p_i \cdot \dfrac{\partial \lambda *}{\partial p_k} & \text{при } i = k\,, \end{cases}$$

получим:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^*)\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} - p_i \cdot \frac{\partial \lambda *}{\partial p_k} = \lambda * \cdot \delta_{ik}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k\,, \\ 1 & \text{при } i = k\,. \end{cases}$$

Из уравнений (5.3):

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j^*\right) = 0\,.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(p_j \cdot x_j^*\right) = \begin{cases} p_j \cdot \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k} & \text{при } j \neq k, \\ x_k^* + p_j \cdot \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k} & \text{при } j = k, \end{cases}$$

можно записать:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} = -x_k^*,$$

или,

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} = x_k^*.$$

Таким образом, получена система из (n + 1) уравнения относительно (n + 1) неизвестных $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_k}, \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_k}, \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_k}, \ldots, \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_k}$:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k} = x_k^*, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^*) \cdot \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k} - p_i \cdot \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_k} = \lambda^* \cdot \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.6}$$

Система уравнений (5.6) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ -p_2 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_k & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_n & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_k} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k^* \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \lambda^* \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, с учетом введенных ранее обозначений, в более компактном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\overline{p} \\ -\overline{p}^T & U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda *}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial \overline{x} *}{\partial p_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k^* \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \lambda^* \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для определения неизвестных $\dfrac{\partial \lambda *}{\partial p_k}$, $\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_k}$, $\dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_k}$, …, $\dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_k}$ необходимо решить полученное матричное уравнение. Матрица, обратная к матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & -\overline{p} \\ -\overline{p}^T & U \end{pmatrix},$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu & \mu \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} \\ \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T & \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\mu = -\left(\overline{p} U^{-1} \cdot \overline{p}^T\right)^{-1}$. Это может быть легко установлено непосредственной проверкой (перемножением этих матриц по правилам умножения блочных матриц). Например, блок B_{11} произведения B указанных матриц совпадает с единичной матрицей соответствующего порядка:

$$-\overline{p} \cdot \left(\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T\right) = -\overline{p} \cdot \left(-\left(\overline{p} U^{-1} \cdot \overline{p}^T\right)^{-1}\right) \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T =$$
$$= \left(\overline{p} U^{-1} \cdot \overline{p}^T\right)^{-1} \cdot \left(\overline{p} \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T\right) = E.$$

С учетом этого, решение системы (5.6) в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda *}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial \overline{x} *}{\partial p_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} \\ \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T & \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k^* \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \lambda * \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим k-ю строку матрицы $\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1}$ через

$\left(\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1}\right)_k$. Тогда

$$\frac{\partial \overline{x}*}{\partial p_k} = \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot x_k^* + \lambda * \cdot \left(\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1}\right)_k ,$$

и, следовательно, изменение цены на *k*-й товар приводит к следующему изменению спроса на товары:

$$\frac{\partial \overline{x}*}{\partial p_k} \cdot dp_k = \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot x_k^* \cdot dp_k + \lambda * \cdot \left(\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1}\right)_k \cdot dp_k . \quad (5.7)$$

Экономическое содержание слагаемых в правой части (5.7) прояснится в ходе дальнейших рассуждений.

Изменение спроса при увеличении цены с компенсацией.

Рассмотрим такое увеличение дохода потребителя *dM*, которое компенсирует ему увеличение цены *k*-го товара на dp_k. Согласно теории потребления, «компенсация» означает, что полезность набора товаров $\overline{x}*$ сохранилась на прежнем уровне: d*u* = 0. С учетом соотношений (5.2):

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\overline{x}*\right) \cdot dx_i = \lambda * \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot dx_i = \lambda * \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} dp_k = 0 .$$

Из

$$\lambda * \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} dp_k = 0$$

следует условие постоянства полезности:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} = 0 . \quad (5.8)$$

Из соотношений (5.3) и (5.8) можно определить *dM*:

$$dM = \sum_{i \neq k} p_i \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} dp_k + p_k \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p_k} dp_k + x_k^* \cdot dp_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial p_k} dp_k + x_k^* \cdot dp_k = x_k^* \cdot dp_k .$$

Величина дохода должна вырасти настолько, каковы дополнительные затраты потребителя на приобретение *k*-го товара в прежнем объеме при увеличении цены на dp_k.

Как и в предыдущем рассуждении, продифференцируем уравнения (5.2) по $p_к$:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}*)\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} - p_i\cdot\frac{\partial\lambda*}{\partial p_k} = \lambda*\cdot\delta_{ik}, \quad i=1,2,\ \ldots,n.$$

С учетом (5.8) при компенсированном изменении цены получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} p_j\cdot\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k} = 0, \\ \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}*)\cdot\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_k} - p_i\cdot\dfrac{\partial\lambda*}{\partial p_k} = \lambda*\cdot\delta_{ik}, \quad i=1,2,\ \ldots,n, \end{cases} \tag{5.9}$$

или, в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\overline{p} \\ -\overline{p}^T & U \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda*}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial\overline{x}*}{\partial p_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \lambda* \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda*}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial\overline{x}*}{\partial p_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu\cdot\overline{p}\cdot U^{-1} \\ \mu\cdot U^{-1}\cdot\overline{p}^T & \mu\cdot U^{-1}\cdot\overline{p}^T\cdot\overline{p}\cdot U^{-1}+U^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \lambda* \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial\overline{x}*}{\partial p_k}\right)_{comp} = \lambda^*\cdot\left(\mu\cdot U^{-1}\cdot\overline{p}^T\cdot\overline{p}\cdot U^{-1}+U^{-1}\right)_k.$$

Следовательно, увеличение цены с компенсацией дохода приводит к изменению спроса, равному

$$\left(\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial p_k}\right)_{comp} \cdot dp_k = \lambda^* \cdot \left(\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1}\right)_k \cdot dp_k . \qquad (5.10)$$

Таким образом, прояснилось экономическое содержание второго слагаемого в правой части (5.7). Это изменение спроса в том случае, когда увеличение цены k-го товара на dp_k компенсируется увеличением дохода потребителя на

$$dM = x_k^* \cdot dp_k .$$

Обозначим $H = \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1}$. Поскольку матрица U симметрична, то симметричной является и матрица U^{-1}, а, следовательно, и матрица H. Кроме того, можно показать, что если матрица U отрицательно определена, то элементы главной диагонали матрицы H отрицательны:

$$h_{ii} < 0, \; i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда, учитывая (5.10), получим:

$$\left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p_k}\right)_{comp} = \lambda^* \cdot h_{kk} < 0 .$$

Это означает, что даже при компенсированном увеличении цены товара спрос на этот товар, тем не менее, падает.

Изменение спроса при изменении дохода потребителя.

Предположим, что доход потребителя изменился на величину dM, тогда изменение спроса определяется соотношением

$$d\overline{x}^* = \frac{\partial \overline{x}^*}{\partial M} \cdot dM .$$

Для определения производных $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial M}, \; i = 1, 2, \dots, n,$ как и в предыдущих рассуждениях, выполним дифференцирование уравнений (5.2) и (5.3). На этот раз дифференцирование производится по переменной M.

Из уравнений (5.2):

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\overline{x}^*) - \lambda^* \cdot p_i\right) = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Используя для первого слагаемого правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{x}*)\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}*)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial M},$$

а для второго слагаемого – соотношения

$$\frac{\partial}{\partial M}(\lambda*\cdot p_i) = p_i\cdot\frac{\partial\lambda*}{\partial M},$$

получим:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}*)\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial M} - p_i\cdot\frac{\partial\lambda*}{\partial M} = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Из уравнения (5.3):

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\cdot x_j^*\right) = 1,$$

или

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial M} = -1.$$

Таким образом, получена система из $(n + 1)$ уравнения относительно $(n + 1)$ неизвестных $\frac{\partial\lambda*}{\partial M}, \frac{\partial x_1^*}{\partial M}, \frac{\partial x_2^*}{\partial M}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial M}$:

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} p_j\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial M} = -1, \\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}*)\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial M} - p_i\cdot\frac{\partial\lambda*}{\partial M} = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.11}$$

Система уравнений (5.11) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\bar{p} \\ -\bar{p}^T & U \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda*}{\partial M} \\ \frac{\partial\bar{x}*}{\partial M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial M} \\ \dfrac{\partial \overline{x}^*}{\partial M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} \\ \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T & \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot \overline{p} \cdot U^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \end{pmatrix},$$

откуда

$$\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial M} = -\mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T . \tag{5.12}$$

Из (5.7) и (5.10), с учетом (5.12)

$$\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial p_k} \cdot dp_k = \mu \cdot U^{-1} \cdot \overline{p}^T \cdot x_k^* \cdot dp_k + \left(\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial p_k} \right)_{comp} \cdot dp_k =$$

$$= -\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial M} \cdot x_k^* \cdot dp_k + \left(\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial p_k} \right)_{comp} \cdot dp_k .$$

Таким образом, получен результат:

$$\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial p_k} = \left(\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial p_k} \right)_{comp} - \frac{\partial \overline{x}^*}{\partial M} \cdot x_k^* . \tag{5.13}$$

Соотношение (5.13) называется *уравнением Слуцкого*. Второе слагаемое в правой части этого уравнения (со знаком «минус») снимает искусственный прирост спроса, вызванный компенсирующим увеличением дохода.

Товар i называется *ценным,* если при увеличении дохода потребителя спрос на этот товар растет:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial M} > 0,$$

и *малоценным* – если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial M} \le 0.$$

Из первого уравнения (5.11) следует, что $\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \dfrac{\partial x_j^*}{\partial M} = 1$, поэтому ценные товары обязательно существуют.

Из уравнения (5.13), записанного для i-го товара, следует, что спрос на ценный товар падает при увеличении цены на него:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp} - \frac{\partial x_i^*}{\partial M}\cdot x_i^* < 0$$

(оба слагаемых в правой части отрицательны).

С учетом первого уравнения системы (5.6), равенства $\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial M} = 1$ и (5.13), записанного для *j*-го товара

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial M}\cdot x_i^*\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + x_i^* \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial M} =$$

$$= -x_i^* + x_i^* = 0.$$

Из

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} = 0$$

следует, что обязательно найдется товар *l*, для которого $\left(\frac{\partial x_l^*}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$. Это означает, что уменьшение спроса на *i*-й товар $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$ приводит к увеличению спроса на *l*-й товар. Такие товары называются *взаимозаменяемыми*.

Если же $\left(\frac{\partial x_m^*}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$ (уменьшение спроса на *i*-й товар приводит к уменьшению спроса и на *m*-й товар), то товары *i* и *m* образуют *взаимодополняемую пару*. Например, компенсируемое увеличение цены на бензин приводит к падению спроса на бензин и к падению спроса на автомобили.

Продукт *l* называется *валовым заменителем* продукта *i*, если $\frac{\partial x_l^*}{\partial p_i} > 0$.

Функция спроса $\overline{x}^*(\overline{p}, M)$ обладает свойством *валовой заменимости*, если с увеличением цены на любой продукт i спрос на остальные продукты не убывает:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \geq 0\,, \quad j \neq i.$$

Если

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0\,, \quad j \neq i\,,$$

то функция спроса обладает свойством *сильной валовой заменимости*.

5.2 Модели поведения производителей

В данном разделе рассматриваются модели поведения производителей, основанные на следующем предположении: стратегия производителя определяется его стремлением максимизировать свою прибыль. Следует заметить, что критерий максимизации текущей прибыли не является универсальным, в общем случае его необходимо соотносить со стратегическими прогнозами развития предприятия. Предлагаемые далее модели построены, исходя из того, что рассматриваемое предприятие работает в стабильных (не экстремальных) условиях, и критерий максимизации прибыли может быть выбран в качестве основного.

В разделе 2.1 были рассмотрены производственные функции (ПФ) как инструмент моделирования экономических систем на макро-уровне. Там же было отмечено, что этот инструмент применяется и для построения микромоделей. В данном разделе будут использованы ПФ, характеризующие функционирование отдельных производителей (предприятий, фирм и т. п.).

5.2.1 Модель фирмы

Задача максимизации прибыли.

Предположим, что предприятие выпускает только один вид продукции, либо несколько видов, но в постоянной структуре. Обозначим: X – годовой выпуск предприятия в натурально-вещественной форме (число единиц продукции одного вида или число многономенклатурных агрегатов, произведенных за год).

Для производства продукции используются ресурсы:

L – настоящий труд (среднее число занятых в год или отработанные за год человеко-часы);

K – прошлый труд в виде средств труда (ОПФ);

M – предметы труда (затраченные в течение года энергия, топливо, сырье, материалы, и т. д.).

Каждый такой агрегированный вид ресурсов имеет некоторое число разновидностей (труд разной квалификации, оборудование различного типа и т. п.). Обозначим:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор возможных объемов затрат различных видов ресурсов.

Технология фирмы определяется ее производственной функцией

$$X = F(\overline{x}),$$

которая характеризует зависимость выпуска от затрат ресурсов. Относительно ПФ будем предполагать следующее:

- ПФ дважды непрерывно-дифференцируема;
- ПФ является неоклассической;
- матрица, составленная из ее вторых производных (матрица Гессе), отрицательно определена.

Обозначим:

p – цена единицы продукции;

$\overline{w} = (w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_n)$ – строка цен на ресурсы.

Интерпретация величин x_j и w_j может быть, например, такой [1]:

- для x_j – среднегодового числа занятых определенной профессии w_j – годовая заработная плата одного работника данной профессии;
- для x_j – количества покупных материалов (топливо, энергия и т. п.) w_j –

покупная цена единицы данного материала;

- для x_j – производственных фондов определенного вида w_j – годовая арендная плата за единицу фондов или стоимость поддержания единицы фондов в исправности.

С учетом принятых обозначений прибыль предприятия, соответствующая вектору затрат $\overline{x}$, равна

$$\Pi(\overline{x}) = p \cdot F(\overline{x}) - \overline{w} \cdot \overline{x}.$$

Первое слагаемое в правой части, равное $R = p \cdot F(\overline{x})$, характеризует стоимость годового выпуска фирмы (годовой доход); второе слагаемое (со знаком «минус») $C = \overline{w} \cdot \overline{x}$ – стоимость затрат ресурсов за год (издержки производства).

При отсутствии ограничений на объемы потребляемых ресурсов (кроме естественного требования их неотрицательности) задача максимизации прибыли приобретает вид

$$\max_{\overline{x} \ge 0} \left(p \cdot F(\overline{x}) - \overline{w} \cdot \overline{x} \right). \tag{5.14}$$

Это задача нелинейного программирования с n условиями неотрицательности: $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Необходимые условия экстремума в задачах такого типа определяются условиями Куна-Таккера. Начальные сведения об условиях Куна-Таккера и их применении к решению оптимизационных задач приведены в приложении IV. Рекомендуется изучить этот материал, прежде чем перейти к анализу задачи (5.14).

Условия Куна-Таккера применительно к задаче (5.14) могут быть записаны следующим образом (см. (IV.3) в приложении IV):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i}(\overline{x}*) = p \cdot \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x}*) - w_i \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \overline{x}}(\overline{x}*) \cdot \overline{x}* = \left(p \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}(\overline{x}*) - \overline{w} \right) \cdot \overline{x}* = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(p \cdot \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x}*) - w_i \right) \cdot x_i^* = 0, \\ x_i^* \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{5.15}$$

Если в оптимальном решении использованы все виды ресурсов, т. е.

$x_i^* > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$ то условия (5.15) принимают вид:

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x}*) - w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x}*) = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.16}$$

Таким образом, в оптимальной точке стоимость предельного продукта данного ресурса должна равняться его цене.

Можно показать, что если $F(\overline{x})$ является неоклассической ПФ, то в оптимальном решении $\overline{x}* > 0$, причем это решение единственно. Обоснование этого утверждения предлагается выполнить самостоятельно, опираясь на условия, которым удовлетворяет неоклассическая ПФ.

Теперь рассмотрим задачу максимизации выпуска при ограничении на объем издержек:

$$\max_{\overline{x} \ge 0} F(\overline{x}), \quad \overline{w} \cdot \overline{x} \le C. \tag{5.17}$$

Это задача нелинейного программирования с одним линейным ограничением и n условиями неотрицательности: $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Необходимые условия экстремума в задаче (5.17) определяются условиями Куна-Таккера (IV.8) (см. Приложение IV). Применительно к (5.17) эти условия имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}*) - \lambda * \cdot w_j \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}(\overline{x}*) - \lambda * \cdot \overline{w} \right) \cdot \overline{x}* = 0, \\ \overline{\lambda} * \cdot (C - \overline{w} \cdot \overline{x}*) = 0, \\ x_j^* \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ C - \overline{w} \cdot \overline{x}* \ge 0, \\ \lambda * \ge 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Можно заметить, что при $\lambda * = \dfrac{1}{p}$ первые два условия совпадают с условиями, полученными для задачи (5.14).

Проследим взаимосвязь задач (5.14) (максимизации прибыли без ограничения на объемы затрат) и (5.17) (максимизации выпуска при наличии ограничения на затраты). Если вектор $\bar{x}^* > 0$ является решением задачи (5.14) (предполагается, что все ресурсы входят в оптимальный набор), то этому вектору затрат соответствует общая сумма издержек, равная $C^* = \bar{w} \cdot \bar{x}^*$. Нетрудно показать, что задача (5.17) при заданной величине издержек C^* с неоклассической ПФ $F(\bar{x})$ будет иметь своим оптимальным решением тот же самый вектор $\bar{x}^*$.

Таким образом: если задача на максимум прибыли (5.14) имеет единственное решение $\bar{x}^* > 0$, то ей соответствует задача на максимум выпуска <u>при заданных</u> издержках, равных $C^* = \bar{w} \cdot \bar{x}^*$, причем вторая задача имеет то же решение, что и первая.

Изокосты.

Для количественной оценки доступности ресурсов производителю используется понятие *изокосты* (*бюджетной линии*).

Бюджетной линией или *изокостой* называется множество векторов $\bar{x}$, определяющих одну и ту же величину издержек C:

$$\bar{w} \cdot \bar{x} = C.$$

Изменение бюджетных ограничений C приводит к параллельному сдвигу изокосты; изменение стоимости ресурсов $\bar{w}$ изменяет углы наклона изокосты.

<u>Пример</u>. Определение поведения фирмы.

Пусть выпуск однопродуктовой фирмы характеризуется ПФ Кобба-Дугласа $X = F(K, L) = 3 \cdot K^{2/3} \cdot L^{1/3}$. На аренду фондов и оплату труда выделено 150 ден. ед., стоимость аренды единицы фондов $w_K = 5$ ден. ед./ед. ф.; ставка заработной платы $w_L = 10$ ден. ед./чел. Найдем максимальный выпуск и предельную норму замены одного занятого фондами в оптимальной точке.

Учитывая, что $F(0, L) = F(K, 0) = 0$, в точке максимума справедливо

$$K^* > 0,\ \ L^* > 0,$$

поэтому необходимые условия экстремума (5.18) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial K} = \lambda^* \cdot w_K\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} = \lambda^* \cdot w_L\,, \\ w_K \cdot K^* + w_L \cdot L^* = C. \end{cases} \qquad (*)$$

После подстановки производных

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{L^*}{K^*}\right)^{1/3} = \lambda^* \cdot w_K\,, \\ \left(\dfrac{K^*}{L^*}\right)^{2/3} = \lambda^* \cdot w_L\,, \\ w_K \cdot K^* + w_L \cdot L^* = C. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} \dfrac{2L^*}{K^*} = \dfrac{w_K}{w_L}, \\ w_K \cdot K^* + w_L \cdot L^* = C. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения одну неизвестную через другую и подставив во второе уравнение, окончательно получим:

$$K^* = \frac{2C}{3w_K}, \quad L^* = \frac{C}{3w_L}.$$

После подстановки заданных числовых значений:

$$K^* = \frac{2 \cdot 150}{3 \cdot 5} = 20(\text{ед. ф.}), \quad L^* = \frac{150}{3 \cdot 10} = 5(\text{чел.}),$$

оптимальный выпуск составит

$$X^* = F(K^*, L^*) = 3 \cdot 20^{2/3} \cdot 5^{1/3} \approx 37{,}81(\text{ед.}).$$

Геометрическая иллюстрация проведенных рассуждений показана на рис. 5.2. На рисунке изображено несколько изоквант (линий постоянных выпусков) и изокост (линий постоянных издержек). Оптимальное решение задачи максимизации выпуска при наличии бюджетных ограничений определяется координатами точки касания изокванты, соответствующей оптимальному значению выпуска, и изокосты, соответствующей заданной величине издержек.

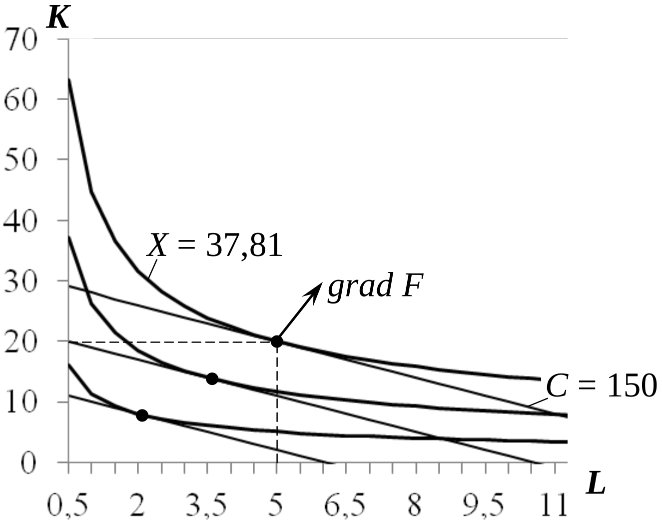


Рисунок 5.2. Определение оптимальной стратегии фирмы.

Предельная норма замены труда фондами равна

$$S_K = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \frac{K}{2L},$$

в точке максимума (K^*, L^*) это значение составит $S_K = \dfrac{20}{2 \cdot 5} = 2$. Это означает, что при оптимальных затратах ресурсов (K^*, L^*) один работающий может быть заменен двумя единицами фондов с сохранением того же (оптимального) значения выпуска.

Замечание. В примере показано, что для ПФ двух переменных $X = F(K, L)$ и $K^* > 0, L^* > 0$ в точке максимума необходимо выполнение условий (*), из которых вытекает соотношение

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{w_K} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{w_L}. \qquad (**)$$

Экономическая интерпретация этого соотношения состоит в следующем:

вложение дополнительной платежной единицы в любой из факторов производства приводит к одинаковому выпуску дополнительных единиц продукта.

С геометрической точки зрения данное условие означает коллинеарность векторов нормали к изокосте и изокванте (т. е. изокоста – касательная к изокванте) в точке максимума. Этот факт проиллюстрирован на рис. 5.2. Визуальное отличие угла между вектором $grad\ F$ и изокостой от прямого угла объясняется несовпадением масштаба по осям координат.

Геометрическое место точек касания изокост и изоквант при различных значениях издержек C определяет долгосрочный путь развития фирмы $X(C)$: показывает зависимость изменения оптимального значения выпуска от изменения величины издержек (см. рис. 5.2). При этом задача максимизации выпуска при фиксированном значении издержек и задача минимизации издержек при заданном уровне выпуска продукта имеют одно и то же решение.

Пример. Выпуск однопродуктовой фирмы характеризуется ПФ $X = F(K, L)$. Определим, удовлетворяет ли условиям оптимальности состояние фирмы при величине предельных продуктов $\frac{\partial F}{\partial K} = 8$, $\frac{\partial F}{\partial L} = 10$, если цены единицы ресурсов равны $w_K = 4$, и $w_L = 5$.

Проверим выполнение условия (**).

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{w_K} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{w_L} = \frac{10}{5} = 2.$$

Имеем 2 дополнительные единицы продукта на каждую платежную единицу, вложенную как в приобретение труда, так и в производственные фонды. Эффективность вложения платежных средств в оба вида ресурсов одинакова, следовательно, имеет место статическое равновесие производителя (эффективное распределение ресурсов).

Если предположить, что по каким-то причинам стоимость единицы капитала возрастет до $w'_K = 5$, то

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{w'_K} = \frac{8}{5} = 1.6,$$

т. е. вложение платежных средств в покупку труда становится более выгодным, чем приобретение капитала. Это означает, что повышение цены w_K приведет к снижению фондовооруженности.

Функции спроса (на ресурсы) и предложения.

Пусть в задаче (5.14) в оптимальном решении использованы все виды ресурсов. Тогда имеют место соотношения (5.16):

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}^*) = w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если матрица Гессе

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 F(\bar{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

невырождена[9], то соотношения (5.16) могут быть разрешены относительно $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$:

$$x_i^* = x_i^*(p, \bar{w}), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.19}$$

Уравнения (5.19) определяют *функции спроса* (на ресурсы). В векторной форме: $\bar{x}^* = \bar{x}^*(p, \bar{w})$.

По известным функциям спроса (объемам потребляемых ресурсов в зависимости от цен на продукт и на ресурсы) можно определить объем выпуска как функцию цен:

$$X^*(p, \bar{w}) = F(\bar{x}^*(p, \bar{w})).$$

[9] Если матрица H, в соответствии с предположением, принятым в начале раздела, отрицательно определена, то она обязательно не вырождена.

Это соотношение определяет *функцию предложения*.

Таким образом, при заданных ценах p и $\overline{w}$ поведение производителя определяется системой из (n + 1) уравнения:

$$\begin{cases} X^*(p,\overline{w}) = F(\overline{x}^*(p,\overline{w})), \\ p\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x}^*(p,\overline{w})) = w_i, \quad i=1,2,\ \ldots,\ n. \end{cases} \tag{5.20}$$

Система (5.20) позволяет прогнозировать реакцию производителя на изменение цены выпуска и цен ресурсов. Аналогичный анализ был проведен в подразделе 5.1.2 при изучении поведения потребителя.

Реакция производителя на изменение цены выпуска.

Предположим, что изменилась цена выпускаемой продукции p. Чтобы определить реакцию производителя на это изменение, продифференцируем все уравнения системы (5.20) по p:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} = \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\cdot\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + p\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p} = 0, \quad i=1,2,\ \ldots,\ n, \end{cases}$$

или, в более компактной записи,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} = \dfrac{\partial F}{\partial\overline{x}}\cdot\dfrac{\partial\overline{x}^*}{\partial p}, \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial\overline{x}}\right)^T + p\cdot H\cdot\dfrac{\partial\overline{x}^*}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial\overline{x}} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial\overline{x}^*}{\partial p} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial\overline{x}_1^*}{\partial p} & \dfrac{\partial\overline{x}_2^*}{\partial p} & \cdots & \dfrac{\partial\overline{x}_n^*}{\partial p}\end{pmatrix}^T.$$

Последняя система может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}} \\ 0 & p \cdot H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \overline{x}^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right)^T \end{pmatrix}. \qquad (5.21)$$

Матричное уравнение (5.21) определяет реакцию производителя (изменения объема выпуска и спроса на ресурсы) на изменение цены выпуска p, в предположении, что и в изменившихся условиях производитель максимизирует свою прибыль.

Реакция производителя на изменение цен ресурсов.

Предположим, что изменилась цена k-го ресурса w_k. Продифференцируем уравнения (5.20) по w_k:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X^*}{\partial w_k} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} \cdot \dfrac{\partial x_j^*}{\partial w_k}, \\ p \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \dfrac{\partial x_j^*}{\partial w_k} = \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (5.22)$$

Система (5.22) включает $n(n + 1)$ уравнений. Обозначим:

$$\frac{\partial X^*}{\partial \overline{w}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial w_1} & \dfrac{\partial X^*}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial X^*}{\partial w_n} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial \overline{w}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*(p, \overline{w})}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_1^*(p, \overline{w})}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^*(p, \overline{w})}{\partial w_n} \\ \dfrac{\partial x_2^*(p, \overline{w})}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_2^*(p, \overline{w})}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2^*(p, \overline{w})}{\partial w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_n^*(p, \overline{w})}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_n^*(p, \overline{w})}{\partial w_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^*(p, \overline{w})}{\partial w_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда система (5.22) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}} \\ 0 & p \cdot H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial \overline{w}} \\ \dfrac{\partial \overline{x}^*}{\partial \overline{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}, \qquad (5.22')$$

$$(n + 1)\times(n + 1) \qquad (n + 1)\times n \qquad (n + 1)\times n$$

где E_n – единичная матрица порядка n. Под матричным уравнением (5.22′)

обозначены порядки матриц, входящих в это уравнение.

Уравнение (5.22′) описывает реакцию производителя (изменение объема выпуска и спроса на ресурсы) на изменение цен ресурсов.

Реакция производителя на одновременное изменение цены выпуска и цен ресурсов.

Объединим уравнения (5.21) и (5.22′):

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}} \\ 0 & p\cdot H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial p} & \dfrac{\partial X^*}{\partial \overline{w}} \\ \dfrac{\partial \overline{x}^*}{\partial p} & \dfrac{\partial \overline{x}^*}{\partial \overline{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right)^T & E_n \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Уравнение (5.23) называется *основным матричным уравнением теории фирмы*. Оно описывает реакцию производителя на одновременное изменение цены выпуска и цен ресурсов.

Разрешим уравнение (5.23) относительно изменений выпуска $\dfrac{\partial X*}{\partial p}$, $\dfrac{\partial X*}{\partial \overline{w}}$ и спроса на ресурсы $\dfrac{\partial \overline{x}*}{\partial p}$, $\dfrac{\partial \overline{x}*}{\partial \overline{w}}$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X*}{\partial p} & \dfrac{\partial X*}{\partial \overline{w}} \\ \dfrac{\partial \overline{x}*}{\partial p} & \dfrac{\partial \overline{x}*}{\partial \overline{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}} \\ 0 & p\cdot H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right)^T & E_n \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

По правилу обращения блочных матриц,

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}} \\ 0 & p\cdot H \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}\cdot H^{-1} \\ 0 & \dfrac{1}{p}\cdot H^{-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что правильность вычисления обратной матрицы может быть проверена непосредственным перемножением исходной и обратной матриц.

Подставив последнее выражение в (5.24) и записав матричное соотношение в развернутом виде, получим решение системы уравнений фирмы:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial X^*}{\partial p} = -\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}\cdot H^{-1}\cdot\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^T, \\
\dfrac{\partial \overline{x}^*}{\partial p} = -\dfrac{1}{p}\cdot H^{-1}\cdot\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^T, \\
\dfrac{\partial X^*}{\partial \overline{w}} = \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}\cdot H^{-1}, \\
\dfrac{\partial \overline{x}^*}{\partial \overline{w}} = \dfrac{1}{p}\cdot H^{-1}.
\end{cases}
\tag{5.25}
$$

Рассмотрим отдельно первое уравнение (5.25):

$$
\frac{\partial X^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}\cdot\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\cdot H^{-1}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^T.
$$

Это уравнение описывает изменение выпуска при изменении цены на продукцию фирмы. Если матрица H отрицательно определена, то и матрица H^{-1} является отрицательно определенной, поэтому

$$
\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\cdot H^{-1}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^T < 0,
$$

и, следовательно, $\dfrac{\partial X^*}{\partial p} > 0$. Это означает, что с ростом цены на продукцию фирмы объем выпуска будет расти.

С другой стороны, используя правило дифференцирования сложной функции $X^*(p,\overline{w}) = F(\overline{x}^*(p,\overline{w}))$, получим:

$$
\frac{\partial X^*}{\partial p} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j^*}{\partial p} > 0. \tag{5.26}
$$

Учитывая, что для неоклассической ПФ

$$
\frac{\partial F}{\partial x_j} > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,
$$

из (5.26) можно сделать вывод, что для некоторых значений j обязательно выполняется $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p} > 0$, т. е. увеличение цены выпуска приводит к увеличению спроса на некоторые ресурсы.

Ресурс l-го вида называется *малоценным*, если $\frac{\partial x_l^*}{\partial p} < 0$ (увеличение цены выпуска приводит к падению спроса на этот ресурс). Из проведенного выше рассуждения следует, что не все ресурсы являются малоценными.

Теперь сопоставим второе и третье уравнение системы (5.25). С учетом симметричности матрицы H,

$$\left(\frac{\partial X^*}{\partial \overline{w}}\right)^T = -\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial p},$$

или, в развернутой форме,

$$\frac{\partial X^*}{\partial w_j} = -\frac{\partial x_j^*}{\partial p}, \quad j = 1, 2, \ \dots, \ n. \tag{5.27}$$

Отсюда следует, что повышение цены продукции приводит к повышению (понижению) спроса на те виды ресурсов, повышение цен на которые влечет уменьшение (возрастание) оптимального выпуска. В частности, увеличение цены на малоценный ресурс ведет к увеличению выпуска.

Подставив соотношения (5.27) в (5.26), получим:

$$\frac{\partial X^*}{\partial p} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}^*) \cdot \frac{\partial X^*}{\partial w_j} > 0.$$

Поэтому из $\frac{\partial F}{\partial x_j} > 0$, $j = 1, 2, \ \dots, \ n$, следует, что для некоторых значений j обязательно выполняется $\frac{\partial X^*}{\partial w_j} < 0$. Т. е. возрастание цены на некоторые виды ресурсов приводит к сокращению выпуска.

Из последнего уравнения (5.25):

$$\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{p} \cdot H^{-1},$$

поэтому матрица $\frac{\partial \overline{x}^*}{\partial \overline{w}}$ отрицательно определена и симметрична. Из ее отрицательной определенности следует, что

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial w_j^*} < 0\,.$$

Это означает, что повышение цены на некоторый ресурс всегда приводит к падению спроса на него (кривые спроса всегда убывающие).

Симметричность матрицы $\dfrac{\partial \overline{x}\,*}{\partial \overline{w}}$ по определению означает

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial w_i^*} = \frac{\partial x_i^*}{\partial w_j^*}\,, \quad i, j = 1, 2, \ \ldots, \ n\,.$$

Следовательно, влияние изменения цены *i*-го ресурса на изменение спроса на *j*-й ресурс и изменения цены *j*-го ресурса на изменение спроса на *i*-й ресурс одинаковы.

Ресурсы *j*-го и *k*-го видов называются *взаимозаменяемыми*, если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial w_k^*} > 0$, т. е. увеличение цены на один из ресурсов приводит к падению спроса на этот ресурс, но к увеличению спроса на другой.

Ресурсы *j*-го и *k*-го видов называются *взаимодополняемыми*, если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial w_k^*} < 0$, т. е. увеличение цены на один из ресурсов приводит к одновременному падению спроса на оба этих ресурса.

Действия производителей при взимании налогов.

Производитель характеризуется производственной функцией

$$X = F(\overline{x}),$$

его прибыль составляет

$$\Pi(\overline{x}) = p \cdot F(\overline{x}) - \overline{w} \cdot \overline{x}.$$

Во всех предыдущих рассуждениях моделирование поведения производителя выполнялось без учета налоговой нагрузки. Возникает вопрос, как изменится оптимальная стратегия производителя с учетом необходимости уплаты налогов.

Существуют различные виды налогов, и разумно предположить, что разные способы формирования отчисляемой в виде налога суммы по-разному влияют на стратегию производителя. Далее рассматриваются два вида налогов.

- Налог с прибыли.

  При налоговой ставке t производитель отчисляет государству t-ю часть прибыли. Тогда задача максимизации прибыли (5.14) приобретает вид

$$\max_{\overline{x}\geq 0}\left(p\cdot F\left(\overline{x}\right)-\overline{w}\cdot\overline{x}\right)\left(1-t\right).$$

  Целевая функция из (5.14) умножается на постоянный множитель (1–t), поэтому теоретически этот налог не влияет на положение точки максимума и на оптимальный объем производства.

- Акцизный налог (налог с продаж).

  При налоговой ставке t производитель отчисляет соответствующую сумму за каждую проданную единицу продукции. Задача максимизации прибыли (5.14) приобретает вид

$$\max_{\overline{x}\geq 0}\left(\left(p-t\right)\cdot F\left(\overline{x}\right)-\overline{w}\cdot\overline{x}\right).$$

  Точка максимума определяется соотношениями

$$\left(p-t\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\overline{x}*\right) = w_i\,,\quad i=1,2,\ \dots,\ n.$$

  По сравнению с (5.16), точка максимума будет соответствовать меньшим значениям затрат ресурсов x_i и меньшему объему производства.

5.2.2 Поведение фирм на конкурентных рынках

В условиях конкурентной борьбы производителей можно выделить две принципиально различные ситуации.

- *Совершенная конкуренция.*

  Эта ситуация характеризуется большим количеством участников рынка, вследствие чего рыночные цены не зависят от действий отдельных участников.

- На рынке имеется небольшое число участников, поэтому цены на рынке напрямую зависят от стратегий, применяемых его участниками.

Первая из описанных ситуаций будет рассмотрена в разделе 5.3.

В данном подразделе рассмотрим вторую ситуацию: имеется два конкурента, производящих одну и ту же продукцию, каждый в соответствии со своей производственной функцией

$$X_i = F_i\left(\bar{x}^i\right), \quad i = 1, 2.$$

Будем основываться на следующих предположениях.

- Цена продукции зависит от объема выпусков обоих фирм:

$$p = p\left(X_1,\ X_2\right),$$

причем при возрастании выпусков цена падает:

$$\frac{\partial p}{\partial X_1} < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial X_2} < 0.$$

- Цены на ресурсы зависят от объемов потребления этих ресурсов первой и второй фирмами:

$$w_j = w_j\left(x_j^1,\ x_j^2\right), \quad j = 1, 2,\ \ldots,\ n,$$

причем цены возрастают при увеличении спроса на ресурсы:

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} > 0, \quad \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2} > 0, \quad j = 1, 2,\ \ldots,\ n.$$

- Каждая фирма стремится максимизировать свою прибыль.

При этих предположениях поведение первой фирмы формализуется следующей моделью:

$$\max_{\bar{x} \ge 0}\left(p\left(X_1,\ X_2\right) \cdot X_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j\left(x_j^1,\ x_j^2\right) \cdot x_j^1 \right) \tag{5.28}$$

при условии

$$X_1 = F_1\left(x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1\right).$$

Это задача нахождения условного экстремума, которая решается путем безусловной максимизации функции Лагранжа

$$L\left(X_1, \bar{x}^1, \lambda\right) = p\left(X_1, X_2\right) \cdot X_1 - \sum_{j=1}^{n} w_j\left(x_j^1, x_j^2\right) \cdot x_j^1 + \lambda \cdot \left(F_1\left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right) - X_1\right).$$

Необходимые условия экстремума определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X_1} = p\left(X_1, X_2\right) + X_1 \cdot \dfrac{\partial p}{\partial X_1} + X_1 \cdot \dfrac{\partial p}{\partial X_2} \cdot \dfrac{\partial X_2}{\partial X_1} - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j^1} = -w_j\left(x_j^1, x_j^2\right) - x_j^1 \cdot \dfrac{\partial w_j}{\partial x_j^1} - x_j^1 \cdot \dfrac{\partial w_j}{\partial x_j^2} \cdot \dfrac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1} + \lambda \cdot \dfrac{\partial F_1}{\partial x_j^1} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = F_1\left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right) - X_1 = 0. \end{cases}$$

После исключения λ получим систему из (n + 1) уравнения относительно неизвестных $X_1, x_1^1, \ldots, x_n^1$:

$$\begin{cases} \left(p\left(X_1, X_2\right) + X_1 \cdot \left(\dfrac{\partial p}{\partial X_1} + \dfrac{\partial p}{\partial X_2} \cdot \dfrac{\partial X_2}{\partial X_1}\right)\right) \cdot \dfrac{\partial F_1}{\partial x_j^1} = w_j\left(x_j^1, x_j^2\right) + x_j^1 \cdot \left(\dfrac{\partial w_j}{\partial x_j^1} + \dfrac{\partial w_j}{\partial x_j^2} \cdot \dfrac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}\right), \\ \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\ X_1 = F_1\left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right). \end{cases}$$

Решение этой системы, т. е. набор конкретных значений $X_1, x_1^1, \ldots, x_n^1$, определяет стратегию первой фирмы. Это решение будет зависеть от величин $\dfrac{\partial X_2}{\partial X_1}, \dfrac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}, j = 1, 2, \ldots, n$, которые определяют предполагаемую реакцию второй фирмы на стратегию первой.

Различные предположения о реакции второй фирмы

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1}, \frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

на стратегию первой $X_1, x_1^1, \ldots, x_n^1$ приводят к различным решениям задачи конкуренции (5.28).

Далее будем рассматривать упрощенную постановку задачи конкуренции. Предположим, что

- конкуренция на рынке ресурсов отсутствует;
- издержки фирм являются одинаковыми линейными функциями

выпуска $C_i(X_i) = c \cdot X_i + d, \quad i = 1, 2,$

где c – предельные издержки,

d – постоянные издержки;

- цена продукции – линейная функция общего выпуска фирм

$$p(X) = a - b \cdot X\,, \quad X = X_1 + X_2,$$

где b – падение цены при увеличении общего выпуска на единицу.

Тогда прибыль конкурирующих фирм определяется функциями:

$$\begin{aligned} П_i(X_1, X_2) &= \big(a - b(X_1 + X_2)\big) \cdot X_i - c \cdot X_i - d = \\ &= b \cdot X_i \cdot \big(X_0 - (X_1 + X_2)\big) - d, \quad i = 1, 2\,, \end{aligned}$$

где $X_0 = \dfrac{a-c}{b}.$

Необходимое условие экстремума для первой фирмы имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial П_1}{\partial X_1} &= b \cdot \big(X_0 - (X_1 + X_2)\big) - b \cdot X_1 - b \cdot X_1 \cdot \frac{\partial X_2}{\partial X_1} = \\ &= b \cdot \left(X_0 - (X_1 + X_2) - X_1 \cdot \left(1 + \frac{\partial X_2}{\partial X_1}\right)\right) = 0\,, \end{aligned}$$

откуда выпуск, максимизирующий прибыль, равен

$$X_1^* = \frac{X_0 - X_2}{2 + \dfrac{\partial X_2}{\partial X_1}}. \tag{5.29}$$

Аналогично, для второй фирмы:

$$X_2^* = \frac{X_0 - X_1}{2 + \dfrac{\partial X_1}{\partial X_2}}. \tag{5.30}$$

Равновесие Курно.

Примем следующее предположение: каждая фирма предполагает стратегию конкурирующей фирмы неизменной, т. е.

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial X_2} = 0.$$

Тогда из (5.29) и (5.30)

$$X_1^* = \frac{X_0 - X_2}{2}, \quad X_2^* = \frac{X_0 - X_1}{2},$$

откуда $\quad X_1^* = X_2^* = \dfrac{X_0}{3}.$

Оптимальные значения выпусков фирм, найденные в предположении неизменности стратегии конкурента, называются *точкой равновесия Курно*, обозначение: $\left(X_1^K,\ X_2^K\right)$. Имеем: $X_1^K = X_2^K = \dfrac{X_0}{3}$.

Точка равновесия Курно может быть получена в результате сходимости следующего *алгоритма Курно*:

1) первая фирма выбирает любой выпуск $X_1^{(1)} < X_0$;
2) вторая фирма действует так, как если бы первая фирма все время выбирала $X_1^{(1)}$:

$$X_2^{(1)} = \frac{X_0 - X_1^{(1)}}{2};$$

3) далее обе фирмы действуют аналогично:

$$X_1^{(k)} = \frac{X_0 - X_2^{(k-1)}}{2}, \quad X_2^{(k)} = \frac{X_0 - X_1^{(k)}}{2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

где k – номер итерации.

Обоснование сходимости этого алгоритма приводится далее.

Для величин $X_1^{(k)},\ X_2^{(k)},\quad k = 2, 3, \ldots$ можно вывести соотношения:

$$X_1^{(2)} = \frac{X_0 - X_2^{(1)}}{2} = \frac{X_0 - \dfrac{X_0 - X_1^{(1)}}{2}}{2} = \frac{\left(2^1 - 1\right)X_0}{4^1} + \frac{X_1^{(1)}}{4^1},$$

$$X_2^{(2)} = \frac{X_0 - X_1^{(2)}}{2} = \frac{X_0 - \dfrac{\left(2^1 - 1\right)X_0}{4^1} - \dfrac{X_1^{(1)}}{4^1}}{2} = \frac{\left(2^2 - 2^1 + 1\right)X_0}{2 \cdot 4^1} - \frac{X_1^{(1)}}{2 \cdot 4^1},$$

$$X_1^{(3)} = \frac{X_0 - X_2^{(2)}}{2} = \frac{X_0 - \dfrac{\left(2^2 - 2^1 + 1\right)X_0}{2 \cdot 4^1} + \dfrac{X_1^{(1)}}{2 \cdot 4^1}}{2} =$$

$$= \frac{\left(2^2 + 2^1 - 1\right)X_0}{4^2} + \frac{X_1^{(1)}}{4^2} = \frac{\left(2^2 + 1\right)X_0}{4^2} + \frac{X_1^{(1)}}{4^2},$$

$$X_2^{(3)} = \frac{X_0 - X_1^{(3)}}{2} = \frac{X_0 - \frac{\left(2^2+1\right)X_0}{4^2} - \frac{X_1^{(1)}}{4^2}}{2} =$$

$$= \frac{\left(2^4 - 2^2 - 1\right)X_0}{2\cdot 4^2} - \frac{X_1^{(1)}}{2\cdot 4^2},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$X_1^{(k)} = \frac{X_0 - X_2^{(k-1)}}{2} = \frac{\left(2^{2(k-1)} + 2^{2(k-2)} + \ldots + 1\right)X_0}{4^{k-1}} + \frac{X_1^{(1)}}{4^{k-1}} =$$

$$= \frac{\frac{1\cdot\left(4^{(k-1)}-1\right)}{4-1}X_0}{4^{k-1}} + \frac{X_1^{(1)}}{4^{k-1}} = \frac{\left(4^{k-1}-1\right)X_0}{3\cdot 4^{k-1}} + \frac{X_1^{(1)}}{4^{k-1}},$$

$$X_2^{(k)} = \frac{X_0 - X_1^{(k)}}{2} = \frac{X_0 - \frac{\left(4^{k-1}-1\right)X_0}{3\cdot 4^{k-1}} - \frac{X_1^{(1)}}{4^{k-1}}}{2} =$$

$$= \frac{\left(2\cdot 4^{k-1}+1\right)X_0}{6\cdot 4^{k-1}} - \frac{X_1^{(1)}}{2\cdot 4^{k-1}}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

При вычислении суммы k слагаемых в числителе $X_1^{(k)}$ использована формула суммы n членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

Перейдем к пределу при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} X_1^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left(4^{k-1}-1\right)X_0}{3\cdot 4^{k-1}} + \frac{X_1^{(1)}}{4^{k-1}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right)X_0}{3} + \frac{X_1^{(1)}}{4^{k-1}}\right) = \frac{X_0}{3},$$

$$\lim_{k\to\infty} X_2^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left(2\cdot 4^{k-1}+1\right)X_0}{6\cdot 4^{k-1}} - \frac{X_1^{(1)}}{2\cdot 4^{k-1}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left(2+\frac{1}{4^{k-1}}\right)X_0}{6} - \frac{X_1^{(1)}}{2\cdot 4^{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{2X_0}{6} = \frac{X_0}{3}.$$

Таким образом, описанный выше алгоритм действительно сходится к точке равновесия Курно. Геометрическая иллюстрация его сходимости приведена на рис. 5.3; траектория движения к точке равновесия показана стрелками.

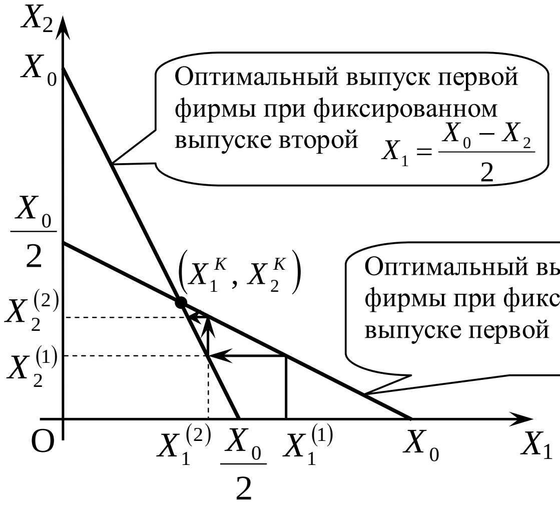


Рисунок 5.3. Сходимость алгоритма Курно к точке равновесия Курно.

В ситуации равновесия Курно обе фирмы получат прибыль в размере

$$\Pi_1\left(X_1^K, X_2^K\right) = \Pi_2\left(X_1^K, X_2^K\right) =$$

$$= b \cdot \frac{X_0}{3} \cdot \left(X_0 - \left(\frac{X_0}{3} + \frac{X_0}{3} \right) \right) - d = \frac{bX_0^2}{9} - d,$$

общий выпуск составит

$$X^K = X_1^K + X_2^K = \frac{X_0}{3} + \frac{X_0}{3} = \frac{2X_0}{3};$$

цена продукции будет равна

$$p\left(X^K\right) = a - b \cdot X^K = a - \frac{2}{3} bX_0 .$$

Равновесие и неравновесие Стакельберга.

Примем следующее предположение: первая фирма полагает, что вторая фирма будет использовать алгоритм Курно, т. е.

$$X_2 = \frac{X_0 - X_1}{2},$$

тогда $\dfrac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\dfrac{1}{2}.$

В соответствии с (5.29), выпуск первой фирмы, максимизирующий ее прибыль, равен

$$X_1^* = \frac{X_0 - X_2}{2 - \frac{1}{2}}.$$

Конечные результаты деятельности фирм будут зависеть от действительной реакции второй фирмы.

1. Предположим, что вторая фирма на самом деле действует по алгоритму Курно. Тогда оптимальные выпуски X_1^*, X_2^* определяются из соотношений

$$X_1^* = \frac{X_0 - \frac{X_0 - X_1^*}{2}}{\frac{3}{2}}, \quad X_2^* = \frac{X_0 - X_1^*}{2},$$

откуда

$$X_1^* = \frac{X_0}{2}, \quad X_2^* = \frac{X_0}{4}.$$

Полученное решение называется *точкой равновесия Стакельберга*, обозначение: $\left(X_1^S,\ X_2^S\right)$. Имеем: $X_1^S = \dfrac{X_0}{2},\ X_2^S = \dfrac{X_0}{4}.$

При этих стратегиях фирмы получат прибыль

$$\Pi_1\left(X_1^S, X_2^S\right) = b \cdot \frac{X_0}{2} \cdot \left(X_0 - \left(\frac{X_0}{2} + \frac{X_0}{4}\right)\right) - d = \frac{bX_0^2}{8} - d,$$

$$\Pi_2\left(X_1^S, X_2^S\right) = b \cdot \frac{X_0}{4} \cdot \left(X_0 - \left(\frac{X_0}{2} + \frac{X_0}{4}\right)\right) - d = \frac{bX_0^2}{16} - d,$$

причем первая фирма получает бо́льшую прибыль, чем вторая.

Общий выпуск обеих фирм составит

$$X^S = X_1^S + X_2^S = \frac{X_0}{2} + \frac{X_0}{4} = \frac{3X_0}{4},$$

цена на продукцию равна

$$p\left(X^S\right) = a - b \cdot X^S = a - \frac{3}{4} bX_0.$$

Заметим, что

$$X^S > X^K, \quad p\left(X^S\right) < p\left(X^K\right).$$

Таким образом, в точке равновесия Стакельберга общий выпуск продукции больше, а цена на эту продукцию меньше, чем в точке равновесия Курно.

2. Предположим, что вторая фирма, как и первая, действует по Стакельбергу, исходя из того, что первая фирма использует алгоритм Курно. т. е.

$$\frac{\partial X_1}{\partial X_2} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда стратегии фирм симметричны, поэтому при одинаковых функциях издержек

$$X_1^* = X_2^*.$$

Эта ситуация называется *неравновесием Стакельберга*, соответствующие этой ситуации стратегии фирм обозначаются $\left(X_1^{\tilde{S}},\ X_2^{\tilde{S}}\right)$.

В соответствии с (5.29), выпуск первой фирмы, максимизирующий ее прибыль, равен

$$X_1^{\tilde{S}} = \frac{X_0 - X_1^{\tilde{S}}}{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$X_1^{\tilde{S}} = X_2^{\tilde{S}} = \frac{2}{5} X_0.$$

В этой ситуации обе фирмы получат прибыль

$$\Pi_1\left(X_1^{\tilde{S}}, X_2^{\tilde{S}}\right) = \Pi_2\left(X_1^{\tilde{S}}, X_2^{\tilde{S}}\right) =$$
$$= b \cdot \frac{2X_0}{5}\left(X_0 - \left(\frac{2X_0}{5} + \frac{2X_0}{5}\right)\right) - d = \frac{2bX_0^2}{25} - d.$$

Можно заметить, что прибыли обеих фирм меньше, чем в точке равновесия Курно.

Общий выпуск обеих фирм составит

$$X^{\tilde{S}} = X_1^{\tilde{S}} + X_2^{\tilde{S}} = \frac{2X_0}{5} + \frac{2X_0}{5} = \frac{4X_0}{5},$$

причем $X^{\tilde{S}} > X^S > X^K$.

Цена на продукцию фирм равна

$$p\left(X^{\tilde{S}}\right) = a - b \cdot X^{\tilde{S}} = a - \frac{4}{5} b X_0,$$

причем $p\left(X^{\tilde{S}}\right) < p\left(X^S\right) < p\left(X^K\right)$.

С учетом последних результатов можно заключить, что ситуация неравновесия Стакельберга наиболее благоприятна для потребителя.

Монополия.

Рассмотрим случай объединения фирм либо договоренности их между собой о максимизации общей прибыли. В этом случае говорят об образовании *монополии*.

Задача максимизации общей прибыли имеет вид:

$$\max_X \left(b \cdot X \cdot (X_0 - X) - 2d\right).$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{d\Pi}{dX} = \frac{d}{dX}\left(b \cdot X \cdot (X_0 - X) - 2d\right) = b \cdot (X_0 - X) - b \cdot X = 0$$

дает

$$X^* = X^M = \frac{X_0}{2}.$$

Соответствующее значение цены продукции составит

$$p\left(X^M\right) = a - b \cdot X^M = a - \frac{bX_0}{2}.$$

Таким образом, в случае образования монополии общий выпуск продукции существенно меньше, а цена этой продукции существенно больше, чем в точках равновесия Курно и Стакельберга. Для потребителя это самая худшая ситуация.

Все основные результаты, полученные в ходе рассмотрения различных вариантов поведения конкурирующих фирм, сведены в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

Выпуски и прибыли фирм и цена на продукцию при разных стратегиях фирм.

Состояние	X_1	X_2	X	$П_1$	$П_2$	$П$	p
Равновесие Курно	$\frac{X_0}{3}$	$\frac{X_0}{3}$	$\frac{2X_0}{3}$	$\frac{bX_0^2}{9}-d$	$\frac{bX_0^2}{9}-d$	$\frac{2}{9}bX_0^2-2d$	$a-\frac{2}{3}bX_0$
Равновесие Стакельберга	$\frac{X_0}{2}$	$\frac{X_0}{4}$	$\frac{3X_0}{4}$	$\frac{bX_0^2}{8}-d$	$\frac{bX_0^2}{16}-d$	$\frac{3}{16}bX_0^2-2d$	$a-\frac{3}{4}bX_0$
Неравновесие Стакельберга	$\frac{2X_0}{5}$	$\frac{2X_0}{5}$	$\frac{4X_0}{5}$	$\frac{2bX_0^2}{25}-d$	$\frac{2bX_0^2}{25}-d$	$\frac{4}{25}bX_0^2-2d$	$a-\frac{4}{5}bX_0$
Монополия			$\frac{X_0}{2}$			$\frac{1}{4}bX_0^2-2d$	$a-\frac{1}{2}bX_0$

5.3 Модели взаимодействия потребителей и производителей

В данном разделе будут представлены некоторые модели, описывающие взаимодействие потребителей и производителей на рынке товаров. Рассматриваются наиболее известные модели установления равновесной цены на рынке одного товара, а также модель Вальраса, определяющая условия достижения общего конкурентного равновесия.

Построения основаны на следующем предположении: число производителей и потребителей достаточно велико для того, чтобы ни один из них не мог напрямую влиять на цены.

5.3.1 Модели установления равновесной цены

В данном подразделе будем анализировать процесс установления равновесной цены на рынке одного товара.

Паутинообразная модель.

При моделировании поведения потребителей (см. раздел 5.1) было показано, что функция спроса на товар, полученная на основе теории полезности, является убывающей функцией цены. Даже при компенсированном увеличении цены товара спрос на этот товар падает.

С другой стороны, в теории фирмы (см. раздел 5.2.1) показано, что функция предложения однопродуктовой фирмы, полученная при решении задачи максимизации прибыли, является возрастающей функцией цены: с ростом цены на продукцию фирмы выпуск растет.

Поэтому будем рассматривать рынок одного продукта, относительно которого справедливы утверждения:

- спрос на продукт характеризуется убывающей функцией совокупного спроса $\Phi(p)$;
- предложение продукта характеризуется возрастающей функцией совокупного предложения $\Psi(p)$.

Будем предполагать, что функции $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ определены и непрерывны для всех $p > 0$, и, кроме того,

$$\lim_{p \to 0} \Phi(p) = \infty, \quad \lim_{p \to \infty} \Phi(p) = 0,$$
$$\lim_{p \to 0} \Psi(p) = 0, \quad \lim_{p \to \infty} \Psi(p) = \infty.$$

Состояние равновесия характеризуется равенством спроса и предложения:

$$\Phi(p) = \Psi(p), \qquad (5.31)$$

причем, в силу принятых предположений, уравнение (5.31) имеет единственное решение p^E, и состояние равновесия

$$\Phi(p^E) = \Psi(p^E) = x^E$$

единственно.

Рассматриваемая далее паутинообразная модель позволяет реализовать процесс «нащупывания» равновесной цены p^E. Процедура поиска равновесной цены состоит в следующем.

1. В начальный момент времени устанавливается начальная цена p_0 (например, цена, сложившаяся на продукцию в предыдущий период времени).
2. В зависимости от значения p_0 принимается решение о величине объема производства, что определяет значение $\Psi(p_0)$.

3. Если цена p_0 больше равновесной, то имеет место $\Phi(p_0) < \Psi(p_0)$, и производитель, исходя из информации о состоянии рынка, вынужден снижать цену до уровня p_1, при котором $\Phi(p_1) = \Psi(p_0)$. В результате спрос увеличивается до величины $\Phi(p_1)$.
4. Значение p_1 определяет величину объема производства $\Psi(p_1)$. Цена p_1 ниже равновесной: $\Phi(p_1) > \Psi(p_1)$, поэтому производитель повышает цену до уровня p_2, при котором $\Phi(p_2) = \Psi(p_1)$. В результате спрос сокращается до величины $\Phi(p_2)$.
5. И т. д.

Графическая иллюстрация описанного процесса показана на рис. 5.4.

Замечание. На рис. 5.4 изображена вогнутая функция предложения $\Psi(p)$. В этом случае процесс установления равновесной цены является сходящимся (последовательность значений цен p_0, p_1, p_2, …, сходится к равновесному значению p^E). В случае выпуклости функции $\Psi(p)$ описанный выше процесс формирования цены будет расходящимся (последовательность p_0, p_1, p_2, …, расходится), хотя уравнение (5.31) и в этом случае имеет единственное решение. Такая ситуация показана на рис. 5.5.

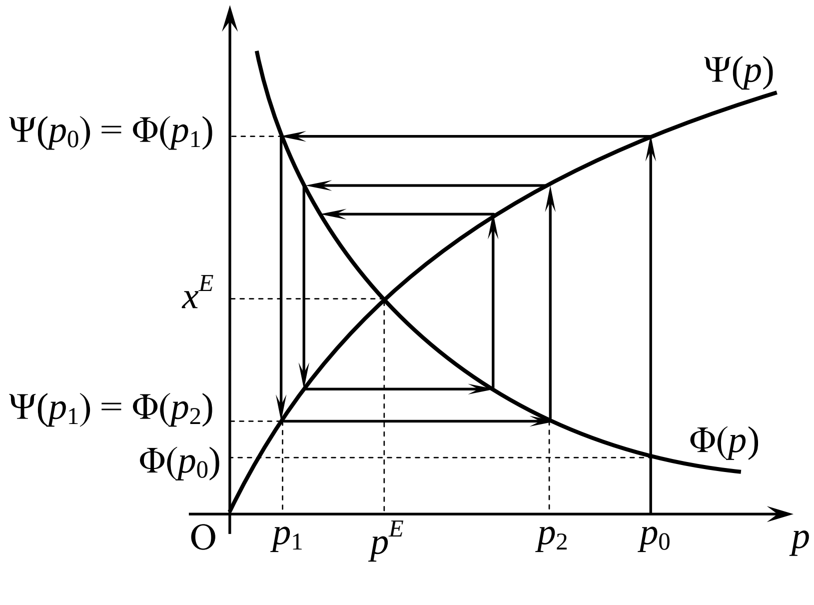


Рисунок 5.4. Процесс установления равновесной цены.

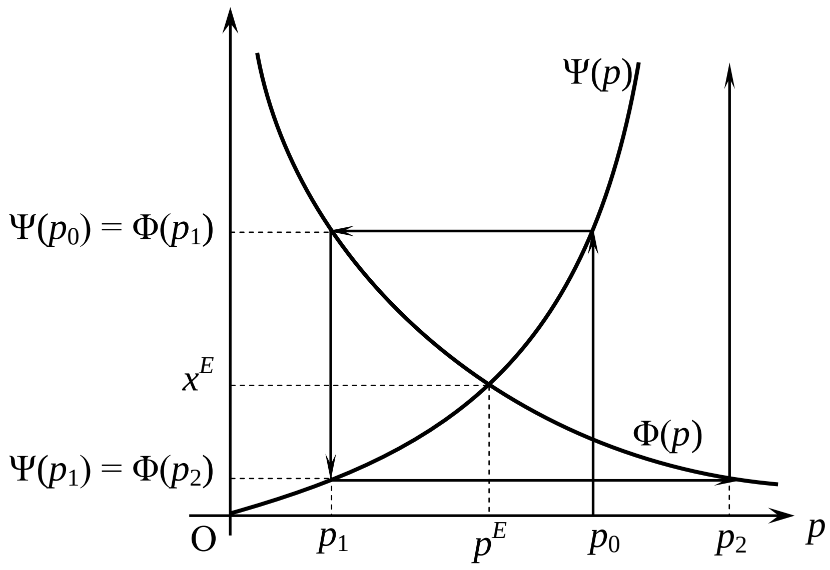


Рисунок 5.5. Расходящийся процесс формирования цены.

Модель Эванса.

Будем рассматривать время t как непрерывную величину. Введем обозначения:

$p = p(t)$ – цена в момент времени t;

$d = d(t) = \Phi[p(t)]$ – совокупный спрос в момент t;

$s = s(t) = \Psi[p(t)]$ – совокупное предложение в момент t.

Рассматриваемая далее модель Эванса построена на основе следующего допущения. Постулируется, что спрос и предложение являются линейными функциями цены:

$\Phi(p) = a - b \cdot p, \quad a > 0, \; b > 0$ (с ростом цены спрос убывает);

$\Psi(p) = \alpha + \beta \cdot p, \quad \alpha > 0, \; \beta > 0$ (с ростом цены предложение растет);

причем $a > \alpha$ (при нулевой цене спрос превышает предложение).

Основное предположение, лежащее в основе модели, состоит в том, что изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением:

$$\Delta p = \gamma \cdot (d - s)\Delta t, \quad \gamma > 0. \qquad (5.32)$$

Согласно (5.32), цена, отражающая взаимодействие потребителей и производителей, непрерывно приспосабливается к ситуации на рынке: в случае превышения спроса над предложением возрастает, в случае превышения предложения над спросом – падает.

Из (5.32)

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \gamma \cdot (d - s),$$

переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и подставляя линейные выражения для спроса и предложения, получим:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(b+\beta)\cdot p + \gamma(a-\alpha), \quad p(0) = p_0 . \tag{5.33}$$

Таким образом, изменение цены описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Метод решения таких уравнений уже был показан выше (см., например, решение уравнения (3.24) в разделе 3.2.1). Общее решение уравнения (5.33) имеет вид:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + C \cdot e^{-\gamma(b+\beta)t} ,$$

где C – произвольная постоянная. С учетом начального условия $p(0) = p_0$, найдем $C = p_0 - \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$, и окончательно получим:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta} \right) \cdot e^{-\gamma(b+\beta)t} .$$

Значение равновесной цены получается при переходе к пределу при $t \to \infty$:

$$p^E = \lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{a-\alpha}{b+\beta} + \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta} \right) \cdot e^{-\gamma(b+\beta)t} \right),$$

$$p^E = \frac{a-\alpha}{b+\beta}. \tag{5.34}$$

Из (5.34) видно, что значение p^E является абсциссой точки пересечения прямых спроса и предложения (при цене p^E спрос равен предложению).

Решение уравнения (5.33) может быть переписано в виде

$$p(t) = p^E + \left(p_0 - p^E\right) \cdot e^{-\gamma(b+\beta)t} ,$$

откуда видно, что

- при $p_0 < p^E$ цена достигает равновесного значения, монотонно возрастая;

- при $p_0 > p^E$ цена достигает равновесного значения, монотонно убывая.

При этом важно, что равновесная цена не зависит от значения p_0.

Дискретная модель Эванса.

Исследование экономических процессов более естественно проводить, исходя из дискретности времени t (решения об объемах производства принимаются в дискретные моменты времени). Дискретная модель Эванса построена на основе следующих основных предположений:

- товар поступает на рынок в течение k равных промежутков времени (k – натуральное число);
- цена товара в течение промежутка времени 1, 2, … k не изменяется и равна, соответственно, $p_1, p_2, \dots, p_k$;
- предложение зависит от цены товара в *предыдущем* промежутке времени и определяется равенством

$$s_i = s(p_{i-1}) = \alpha + \beta \cdot p_{i-1}\ ,\ \ i = 1, 2, \dots, k,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta > 0;$$

- спрос зависит от цены товара в *текущем* промежутке времени и определяется равенством

$$d_i = d(p_i) = a - b \cdot p_i\ ,\ \ i = 1, 2, \dots, k,\ \ a > 0,\ \ b > 0;$$

- в начальный момент времени цена равна p_0.

Исходя из равенства спроса и предложения, получим следующее рекуррентное уравнение:

$$a - b \cdot p_i \ = \ \alpha + \beta \cdot p_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ \dots \tag{5.35}$$

или

$$p_i \ = \ -\frac{\beta}{b} \cdot p_{i-1} + \frac{a - \alpha}{b}, \quad i = 1, 2, \ \dots$$

Выполним замену переменной $y_i = p_i - \dfrac{a - \alpha}{b + \beta}$, после чего уравнение преобразуется к виду

$$y_i \ = \ -\frac{\beta}{b} \cdot y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ \dots \tag{5.36}$$

Уравнение (5.36) определяет геометрическую прогрессию с первым членом y_0 и знаменателем $-\dfrac{\beta}{b}$. Поэтому

$$y_i = y_0 \cdot \left(-\frac{\beta}{b}\right)^i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Возвращаясь к переменным p_i, получим:

$$p_i - \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right) \cdot \left(-\frac{\beta}{b}\right)^i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

или

$$p_i = \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right) \cdot \left(-\frac{\beta}{b}\right)^i + \frac{a-\alpha}{b+\beta}, \quad i = 1, 2, \dots \qquad (5.37)$$

Равенство (5.37) определяет *равновесную цену товара в течение промежутка времени с номером* i по известной начальной цене p_0.

При $\beta < b$ существует *предельная равновесная цена*

$$p^E = \lim_{i\to\infty}\left(\left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right) \cdot \left(-\frac{\beta}{b}\right)^i + \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right) = \frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

5.3.2 Модель Вальраса

Основные предположения.

На концептуальном уровне рассматриваемая далее модель разработана французским экономистом Вальрасом в конце XIX в. В основе схемы, предложенной Вальрасом, лежат следующие представления:

- экономическая система включает конечное множество «атомарных» хозяйственных единиц и конечное множество потребителей;
- число хозяйственных единиц, как и число потребителей велико (имеет место «совершенная конкуренция»);
- каждый из участников преследует собственные цели, поэтому возможны конфликтные ситуации;
- чтобы экономическая система функционировала нормально, действия различных участников должны быть согласованы между собой.

Согласно модели Вальраса, разрешение конфликтов происходит не принудительно, а через конкурентный рыночный механизм, основанный на регулирующем действии системы цен. Как уже отмечено, многочисленные участники рынка не могут напрямую влиять на цены; они должны приспособиться к существующей системе цен. Такой рынок называется *конкурентным*.

Модель Вальраса может рассматриваться как формализация годового цикла производства и распределения товаров в результате взаимодействия субъектов экономической системы (потребителей и производителей), каждый из которых преследует собственные цели. Основная идея модели Вальраса состоит в следующем: при некоторой системе цен индивидуальные намерения участников становятся совместимыми, т. е. эта система цен обеспечивает разрешение конфликта между участниками. Такая ситуация на рынке называется *конкурентным равновесием*. Для формализации этой идеи введем следующие обозначения.

Пусть в рассматриваемой экономической системе l – число потребителей, m – число производителей, n – число товаров. Обозначим:

$\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вектор-строка цен на товары;

$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор-столбец объемов товаров.

В модели Вальраса понятие «товары» включает в себя и предметы потребления, и промежуточный продукт, и средства труда (капитальное оборудование, здания, сооружения и т. п.), и первичные ресурсы (труд, природные ресурсы).

Описание потребителей в модели Вальраса.

Предполагается, что каждый потребитель

- обладает доходом $K_i(\overline{p}),\quad i = 1, 2, \ldots, l$,
- имеет поле предпочтений товаров, определяемое функцией полезности $u_i(\overline{x})\quad i = 1, 2, \ldots, l$.

Обозначим:

$$X_i(\overline{p}) = \{\overline{x} \mid \overline{p} \cdot \overline{x} \le K_i(\overline{p})\} \quad -$$

множество возможных наборов товаров, доступных i-му потребителю при ценах $\overline{p}$. Тогда функция спроса этого потребителя определяется следующим образом:

$$\Phi_i(\overline{p}) = \begin{cases} \overline{x}^* \mid \overline{x}^* \in X_i(\overline{p}),\ u_i(\overline{x}^*) = \max\limits_{\overline{x} \in X_i(\overline{p})} u_i(\overline{x}), \\ 0,\ \text{если максимум не достигается.} \end{cases}$$

Функция спроса определяет множество доступных данному потребителю наборов товаров, при каждом из которых максимизируется значение функции полезности данного потребителя при заданных ценах.

Таким образом, каждый потребитель характеризуется функцией спроса $\Phi_i(\overline{p})$ и доходом $K_i(\overline{p})$. При этом предполагается, что доход i-го потребителя складывается из двух частей:

- дохода $\overline{p} \cdot \overline{b_i}$ от продажи первоначального запаса товаров $\overline{b_i}$,
- дохода $l_i(\overline{p})$ от участия потребителя в производстве,

т. е.

$$K_i(\overline{p}) = \overline{p} \cdot \overline{b_i} + l_i(\overline{p}), \quad i = 1, 2, \ \dots, \ l.$$

Описание производителей в модели Вальраса.

Каждый производитель характеризуется своими технологическими возможностями. Обозначим:

$$\overline{y}_k = (y_{k1}, y_{k2}, \ \dots, \ y_{kn})^T \quad -$$

вектор-столбец затрат-выпуска k-го производителя. Положительные компоненты этого вектора определяют объем выпуска соответствующего товара данным производителем, отрицательные – его затраты. Скалярное произведение $\overline{p} \cdot \overline{y}_k$ определяет прибыль данного производителя.

Технологические возможности k-го производителя, $k = 1, 2, \dots, m$, определяются как множество Y_k всех допустимых векторов затрат-выпуска. Это множество называется *множеством производственных возможностей*. Предполагается, что для любого $k = 1, 2, \dots, m$, множество Y_k замкнуто и содержит нулевой вектор: возможна ситуация, когда производитель ничего не производит и не имеет затрат.

Функцией предложения k-го производителя называется множество (один или несколько) векторов затрат-выпуска, которые при заданных ценах $\overline{p}$ максимизируют прибыль:

$$\Psi_k(\overline{p}) = \left\{ \overline{y}_k^* \;\middle|\; \overline{y}_k^* \in Y_k,\ \overline{p} \cdot \overline{y}_k^* = \max_{\overline{y}_k \in Y_k} \overline{p} \cdot \overline{y}_k \right\}.$$

Построение модели экономики.

Вектор затрат-выпуска для всей экономической системы определяется как сумма векторов затрат-выпуска всех производителей:

$$\overline{y} = \sum_{k=1}^{m} \overline{y}_k .$$

В процессе суммирования промежуточные продукты взаимно уничтожаются (соответствующие компоненты положительны для производителей этих продуктов, и отрицательны для фирм, которые их потребляют). В результате положительные компоненты вектора $\overline{y}$ будут соответствовать конечным продуктам, а отрицательные – первичным ресурсам.

Общеэкономическое множество производственных возможностей определяется как множество всевозможных векторов $\overline{y}$:

$$Y = \left\{ \overline{y} \;\middle|\; \overline{y} = \sum_{k=1}^{m} \overline{y}_k ,\quad \overline{y}_k \in Y_k,\ k = 1, 2,\ \ldots,\ m \right\}.$$

Совокупная первоначальная стоимость определяется как сумма первоначальных запасов товаров по всем потребителям:

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^{l} \overline{b}_i .$$

Она включает потребительские товары, промежуточные продукты (предметы труда), капитальное оборудование (средства труда), природные ресурсы, труд.

Множество $\{\overline{b}\} + Y$ представляет собой *множество совокупного* *предложения*.

Одна из основных функций экономической системы (см. главу 1) состоит в распределении произведенных продуктов. В рамках рассматриваемой модели распределение осуществляется следующим образом.

Распределение производства состоит в выборе вектора затрат-выпуска $\bar{y}_k \in Y_k$ для каждого производителя, k = 1, 2, …, m.

Распределение потребления осуществляется путем выбора каждым потребителем меню потребления $\bar{x}_i \in X_i(\bar{p}), \quad i = 1, 2, \ldots, l$.

Сумма

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i$$

представляет собой *вектор совокупного спроса*. Некоторые из компонент этого вектора могут быть отрицательны, если представляют собой предложение (например, труда).

Совместное распределение производства и потребления – это набор векторов потребления и векторов затрат-выпуска

$$(\bar{x}_1, \quad \ldots, \quad \bar{x}_i, \quad \ldots, \quad \bar{x}_l, \quad \bar{y}_1, \quad \ldots, \quad \bar{y}_k, \quad \ldots, \quad \bar{y}_m),$$
$$\bar{x}_i \in X_i, \quad \bar{y}_k \in Y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

для которого совокупный спрос совпадает с совокупным предложением:

$$\bar{x} = \bar{b} + \bar{y},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i = \bar{b} + \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k .$$

Набор

$$\left(\bar{x}_1^*, \quad \ldots, \quad \bar{x}_i^*, \quad \ldots, \quad \bar{x}_l^*, \quad \bar{y}_1^*, \quad \ldots, \quad \bar{y}_k^*, \quad \ldots, \quad \bar{y}_m^*, \quad \bar{p}*\right)$$

задает конкурентное равновесие в модели Вальраса, если выполняются условия

$$\begin{aligned} &\bar{x}_i^* \in \Phi_i(\bar{p}^*), \quad i = 1, 2, \ \ldots, \ l, \\ &\bar{y}_k^* \in \Psi_k(\bar{p}^*), \quad k = 1, 2, \ \ldots, \ m, \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^* + \bar{b} \ \geq \ \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^* \ , \tag{5.39}$$

$$\bar{p}^* \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k^* + \bar{b} \right) \ = \ \bar{p}^* \cdot \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i^* \ . \tag{5.40}$$

При этом вектор $\bar{p}^*$ называется *вектором конкурентных цен*.

Соотношения (5.39), (5.40) называются *законом Вальраса в широком смысле*. Если в (5.39) имеет место равенство, то это *закон Вальраса в узком смысле*.

Подведем итоги. В модели Вальраса конкурентное равновесие – это совместное распределение производства и потребления, при котором

- совокупный спрос не превосходит совокупного предложения (5.39),
- стоимость совокупного спроса в конкурентных ценах равна стоимости совокупного предложения в этих же ценах (5.40),
- каждый потребитель максимизирует свою полезность в ценах $\bar{p}^*$, а каждый производитель – свою прибыль в этих же ценах (5.38).

Существование конкурентного равновесия означает существование такой системы равновесных (конкурентных) цен $\bar{p}^*$, при которых согласуются интересы потребителей и производителей (задача (5.38) – (5.40) имеет решение). Естественным образом возникает вопрос: при каких условиях существует конкурентное равновесие в модели Вальраса?

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Эрроу-Дебре. Согласно этой теореме, в рассматриваемой модели конкурентное равновесие существует при выполнении следующих условий.

1. Множество наборов потребительских благ $X_i \subset R^n$ для каждого i = 1, 2, …, l является замкнутым, выпуклым, неограниченным множеством.
2. Каждое множество X_i ограничено снизу:

$$\forall i = 1, 2, \ \ldots, \ l \quad \exists \bar{c}_i : \ \forall \bar{x}_i \in X_i \quad \bar{x}_i \geq \bar{c}_i \ .$$

3. Функции $u_i(\overline{x})$ непрерывно дифференцируемы и вогнуты на X_i для всех i = 1, 2, …, l.
4. Каждый потребитель ненасыщаем и обладает положительной начальной собственностью $\overline{b_i}$, $i = 1, 2, \ldots, l$.
5. Каждое технологическое множество $Y_k \subset R^n$ является замкнутым выпуклым множеством, $\overline{0} \in Y_k$.
6. Совокупное технологическое множество Y выпукло и удовлетворяет условию $Y_k \cap R_+^n = \varnothing$ (не может существовать положительного чистого выпуска хотя бы по одному товару без существования затрат хотя бы по одному товару-ресурсу)[10].
7. Существуют константы $\alpha_{ik} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{l} \alpha_{ik} = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, (α_{ik} – доля участия i-го потребителя в прибыли k-го производителя) такие что

$$K_i(\overline{p}) = \overline{p} \cdot \overline{b_i} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} \overline{p} \cdot \overline{y}_k .$$

   В частности, прибыль каждого производителя без остатка распределяется между потребителями.

Замечание. Даже при условии существования конкурентного равновесия, нет никакой гарантии того, что экономическая система перейдет в это состояние. Необходимо выполнить исследование, для каких состояний экономической системы возможен переход в состояние конкурентного равновесия, и указать управляющие воздействия, при которых этот переход может осуществиться.

Задания для самостоятельного выполнения

***Задание* 1**.

Предпочтения потребителя заданы функцией полезности вида $u(x_1, x_2) = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; доход потребителя равен M, цены товаров

[10] Символом R_+^n обозначен неотрицательный ортант (множество векторов размерности n, все компоненты которых неотрицательны).

– p_1 и p_2 соответственно. Убедиться, что функция $u(x_1, x_2)$ обладает основными свойствами функции полезности, построить кривые безразличия, найти функцию спроса $\overline{x}*(\overline{p}, M)$ и исследовать эту функцию. В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Проверить выполнение основных свойств функции полезности.
2. Составить уравнения кривых безразличия. Дать экономическую интерпретацию.
3. Построить математическую модель поведения потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Свести ее к задаче нахождения условного экстремума, решить полученную задачу, найти функцию спроса $\overline{x}*(\overline{p}, M)$ и максимальную полезность.
4. Проверить выполнение условия пропорциональности вектора предельных полезностей и вектора цен в точке максимума (условие (5.4)).
5. Ответить на вопросы: как изменится спрос на товары при изменении цены на каждый из товаров; как изменится спрос на товары при изменении дохода потребителя.
6. Найти норму замены второго товара первым в оптимальной точке. Дать экономическую интерпретацию.
7. Ответить на вопросы:
   7.1) являются ли товары x_1 и x_2 взаимозаменяемыми?
   7.2) обладает ли функция $u(x_1, x_2)$ свойством валовой заменимости; сильной валовой заменимости?
8. Пользуясь результатами, полученными в пп. 1 – 7, для заданных значений параметров: A = 3, α = 2/3, M = 100 ден. ед., p_1 = 5 ден. ед. и p_2 = 10 ден. ед.
   8.1) построить несколько кривых безразличия;
   8.2) определить оптимальный набор товаров $\overline{x}*$ и найти значение максимальной полезности;
   8.3) найти величину изменения спроса на товары при заданном изменении

цены на каждый из товаров; при заданном изменении дохода потребителя;

8.4) найти норму замены второго товара первым в оптимальной точке.

***Задание* 2.**

Рекламное объявление в газете стоит w_1 ден. ед., минута телевизионного времени – w_2 ден. ед. Недельный рекламный бюджет фирмы составляет C ден. ед. Если x_1, x_2 – соответственно число объявлений в газете и число минут рекламного времени на телевидении в неделю, то за счет рекламы фирма получает возможность дополнительной реализации своей продукции в объеме $F(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 24x_1 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 6x_2$ ед. в неделю. Определить поведение фирмы в предположении максимизации объема дополнительно реализуемой продукции: найти оптимальное распределение рекламного бюджета, максимально возможный объем продукции, который можно дополнительно реализовать за счет рекламы, дополнительную прибыль, полученную от реализации этой продукции, функцию спроса на различные виды рекламы. В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Записать математическую постановку задачи максимизации дополнительного объема реализуемой продукции при ограничении на рекламный бюджет.
2. Решить полученную задачу нелинейного программирования. Найти оптимальное распределение рекламного бюджета как функцию цены на продукцию фирмы и цен на различные виды рекламы (функцию спроса), а также максимально возможную прибыль от рекламы.
3. Найти предельную норму замены одного вида рекламы другим в оптимальной точке. Дать экономическую интерпретацию.
4. Используя результаты, полученные при выполнении пп. 1 – 3, для параметров C = 900 ден. ед., p = 50 ден. ед., w_1 = 50 ден. ед. и w_2 = 150 ден. ед. получить числовые значения следующих показателей:

4.1) оптимальное распределение рекламного бюджета;

4.2) максимальный объем дополнительно реализуемой продукции;

4.3) максимально возможная прибыль от рекламы;

4.4) предельная норма замены одного вида рекламы другим в оптимальной точке.

5. Выполнить геометрическую иллюстрацию решения задачи: построить изокосты для заданного значения C, а также значений $C \pm \Delta C$, $C \pm 2\Delta C$ для некоторого ΔC (выбрать самостоятельно); изокванты, характеризующие объемы реализуемой продукции, соответствующие указанным значениям затрат на рекламу, и точки максимума прибыли.
6. На основе полученных результатов обосновать стратегию распределения рекламного бюджета фирмы в долгосрочном периоде.
7. Ответить на вопросы:

7.1) Имеется ли среди рассматриваемых видов рекламы малоценный?

7.2) Являются ли используемые ресурсы взаимозаменяемыми, взаимодополняемыми?

***Задание* 3**.

Прибыли двух фирм, конкурирующих на рынке одного товара, и цена товара, соответственно равны

$$\Pi_i(X_1, X_2) = b \cdot X_i \cdot (X_0 - (X_1 + X_2)) - d, \quad i = 1, 2,$$

и $\quad p(X_1, X_2) = a - b(X_1 + X_2)$,

где X_1 и X_2 – объемы выпусков фирм. Определить поведение фирм в предположении максимизации прибыли: найти оптимальный выпуск каждой фирмы при известном выпуске другой; общий выпуск при объединении фирм. В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Записать математическую постановку задачи максимизации прибыли каждой из фирм.
2. Найти оптимальные решения полученных задач при условии, что объем выпуска другой фирмы задан.
3. Определить наилучшую стратегию первой фирмы при условии, что выпуск второй фирмы составит

а) $X_2 = \dfrac{X_0 - X_1}{2}$;

б) $X_2 = \dfrac{X_0 - X_1}{3/2}$.

В обоих случаях определить общий выпуск фирм и цену на их продукцию.

При определении оптимальной стратегии первой фирмы показать, что необходимые условия экстремума в данном случае действительно определяют точку максимума прибыли.

4. Найти оптимальный общий выпуск и цену на продукцию в случае объединения фирм.
5. Для параметров $X_0 = 9$, $a = 15$ и $b = 1$ выполнить все расчеты, указанные в п. 2 – 4. Ответить на вопрос: какая из стратегий фирм (3а), 3б) или 4) наиболее предпочтительна для потребителя продукции.

***Задание* 4**.

Издержки и цена на продукцию однопродуктовой фирмы описываются следующим образом: $C(X) = \gamma \cdot X^2 + \beta \cdot X + \alpha$, $p(X) = a - bX$, где X – объем выпуска. Определить поведение фирмы в предположении максимизации прибыли: найти оптимальный выпуск фирмы при заданных условиях; выяснить, как изменится поведение фирмы при введении налога с продаж (налоговая ставка равна t). В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Записать математическую постановку задачи максимизации прибыли фирмы без учета налога с продаж.
2. Найти оптимальное решение полученной задачи.
3. Записать математическую постановку задачи максимизации прибыли фирмы при введении налоговой ставки t.

   Указание: расходы на выплату налога включить явным образом в издержки.
4. Найти оптимальное решение полученной задачи как функцию от t.

5. Найти величину поступлений в бюджет как функцию от налоговой ставки t, предполагая, что фирма придерживается стратегии максимизации прибыли. Определить значение t, при котором величина налоговых поступлений будет максимальной.
6. Построить график зависимости поступлений в бюджет от величины налоговой ставки (кривую Лаффэра).

***Задание* 5**.

Процесс установления равновесной цены на рынке одного товара описывается моделью Эванса с непрерывным временем. Функции спроса и предложения заданы соотношениями $\Phi(p) = a - b \cdot p$ и $\Psi(p) = \alpha + \beta \cdot p$ соответственно, $p = p(t)$ − цена товара в момент времени t. Скорость изменения цены пропорциональна превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности γ. В начальный момент времени цена товара составляла p_0. Смоделировать процесс установления равновесной цены. В ходе исследования выполнить следующее.

1. Составить дифференциальное уравнение, описывающее динамику изменения цены в соответствии с непрерывной моделью Эванса.
2. Получить решение этого уравнения – значение цены товара как функцию времени. Определить величину равновесной цены.
3. Для заданных значений параметров модели $a = 11$, $b = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 0,2$ и $p_0 = 3$ определить динамику изменения цены товара (цену товара как функцию времени), значения цены товара в моменты времени $t = 1, 2, 3$, а также величину равновесной цены.
4. Построить график приближения цены к равновесному значению.
5. Проанализировать полученные результаты, сравнить начальное и равновесное значение цены, описать характер приближения цены к равновесному значению.

***Задание* 6**.

Процесс установления равновесной цены на рынке одного товара описывается дискретной моделью Эванса. Функции спроса и предложения заданы соотношениями $d_i = a - b \cdot p_i$ и $s_i = \alpha + \beta \cdot p_{i-1}$ соответственно, p_i – цена товара в течение промежутка времени i. В начальный момент времени цена товара составляла p_0. Смоделировать процесс установления равновесной цены. В ходе исследования выполнить следующее.

1. Составить рекуррентное уравнение, описывающее динамику изменения цены в соответствии с дискретной моделью Эванса.
2. Получить решение этого уравнения – значение равновесной цены товара в течение промежутка времени с номером i.
3. Сформулировать условие существования предельной равновесной цены.
4. Для заданных значений параметров модели $a = 11$, $b = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$ и $p_0 = 3$ определить динамику изменения цены товара (значение равновесной цены в зависимости от i), найти равновесные цены p_3, p_4 и p_5, определить, существует ли предельная равновесная цена, и, в случае положительного ответа, найти ее значение и построить графическое представление приближения цены к предельному равновесному значению.
5. Проанализировать полученные результаты, в случае существования предельной равновесной цены описать характер приближения цены к ее предельному значению.

***Задание* 7**.

Проверить выполнение условий существования конкурентного равновесия для следующей модели.

Имеются два товара и один потребитель.

Технологическое множество производственного сектора определяется следующим образом: $Y = \{(y_1, y_2) \mid 0 \le y_1 \le a,\ y_2 = 0\},\ a > 0.$

Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$ и определена на множестве

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_2 - a \le x_1 \le x_2 + a\}.$$

Весь доход производственного сектора $p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2$ поступает в распоряжение потребителя.

6. Модели анализа, прогнозирования и регулирования экономики

6.1 Математические модели рыночной экономики

Основные теоретические концепции регулирования национального производства в условиях рынка определяются двумя направлениями: классическим и кейнсианским. Первое направление (классическое) отражает положения автоматического саморегулирования рыночной системы. Второе (кейнсианское) исходит из необходимости обязательного вмешательства государства в рыночную систему, особенно в условиях депрессии. Соответственно этим направлениям сложились две модели макроэкономического равновесия, рассматриваемые в разделах 6.1.1 и 6.1.2.

6.1.1 Классическая модель рыночной экономики

Основы классической модели рыночной экономики были заложены еще в конце XVIII в., развитие основных положений продолжено в XIX в. Эта модель являлась господствующей вплоть до 30-х гг. XX в.

Классическая модель может быть представлена как система взаимосвязанных моделей трех рынков: рынка рабочей силы, рынка денег и рынка товаров. Основная предпосылка классической модели состоит в том, что на всех рынках имеется совершенная конкуренция. Это допущение вполне соответствовало экономической ситуации с конца XVIII в. до первых десятилетий XX в.

Каждый из трех рынков в классической модели описывается с помощью трех зависимостей:

- функции спроса,
- функции предложения,
- условий равновесия.

Рынок рабочей силы.

- Спрос на рабочую силу.

Анализ спроса на рабочую силу в классической модели проводится на основании двух гипотез:

1) фирмы полностью конкурентны как при найме рабочей силы (могут свободно нанимать и увольнять рабочих), так и при предложении товаров;
2) при прочих равных условиях предельный продукт труда снижается по мере увеличения рабочей силы.

Дальнейшие рассуждения основываются на результатах, полученных в теории фирмы (см. раздел 5.2.1), при этом вся экономика рассматривается как одна большая фирма. Будем использовать следующие обозначения:

$F = F(K, L)$ – производственная функция (ПФ),

K – производственные фонды;

L – число занятых;

p – цена продукта.

В теории фирмы было показано, что при неоклассической ПФ в оптимальной точке стоимость предельного продукта ресурса должна равняться его цене (см. соотношение (5.16)). В данном случае, с учетом принятых гипотез, в состоянии равновесия предельный продукт труда в стоимостном выражении должен быть равен ставке заработной платы w:

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial L} = w. \tag{6.1}$$

Действительно, если предположить, что равенство (6.1) не имеет места, то, в случае $p \cdot \frac{\partial F}{\partial L} - w > 0$, производители с каждой дополнительной единицей труда получают прибыль в размере $p \cdot \frac{\partial F}{\partial L} - w$, и, следовательно, стремятся увеличить число занятых; в случае $p \cdot \frac{\partial F}{\partial L} - w < 0$ они несут убытки в размере $w - p \cdot \frac{\partial F}{\partial L}$, и стремятся сократить число занятых. В обоих случаях равновесие не имеет места.

Формализуем это рассуждение. Обозначим Π – прибыль всей экономической системы как одной фирмы.

$$\Pi = p \cdot F(K, L) - w \cdot L - r \cdot K.$$

Если все факторы производства, кроме труда, фиксированы, то необходимое условие максимума прибыли имеет вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p \cdot \frac{\partial F}{\partial L} - w = 0.$$

С учетом второй гипотезы,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = p \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,$$

поэтому (6.1) является не только необходимым, но и достаточным условием максимума прибыли производителей. Из (6.1), в частности, следует: при падении ставки заработной платы предельный продукт также будет падать, пока снова не будет достигнуто равновесие.

Перепишем соотношение (6.1) в виде

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p} \tag{6.1$'$}$$

и продифференцируем обе его части по *реальной заработной плате*[11] $\dfrac{w}{p}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial \left(\dfrac{w}{p}\right)} = 1.$$

В левой части равенства было использовано правило дифференцирования сложной функции. С учетом $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\dfrac{w}{p}\right)} < 0.$$

Таким образом, с ростом реальной заработной платы спрос на рабочую силу

[11] Реальная заработная плата – это отношение $\dfrac{w}{p}$ номинальной заработной платы к уровню цен.

падает.

При заданном уровне реальной заработной платы равенство (6.1') представляет собой уравнение относительно уровня занятости L, обеспечивающего максимум прибыли фирм. Решение этого уравнения – уровень занятости как функция от реальной заработной платы

$$L^D = L^D\left(\frac{w}{p}\right)$$

представляет собой *функцию спроса на рабочую силу*. Как уже было отмечено, эта функция является монотонно убывающей.

- Предложение рабочей силы.

В классической теории принимается постулат: чем больше реальная заработная плата, тем больше предложение рабочей силы, т. е. *функция предложения труда*

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right)$$

является возрастающей функцией аргумента $\frac{w}{p}$.

- Равновесие на рынке труда.

Равновесное значение уровня занятости L^0 соответствует ситуации

$$L^S = L^D,$$

т. е. точке пересечения кривых спроса и предложения рабочей силы (см. рис. 6.1). Значение L^0 называется *уровнем полной занятости*. Ему соответствует значение реальной заработной платы $\left(\frac{w}{p}\right)_0$.

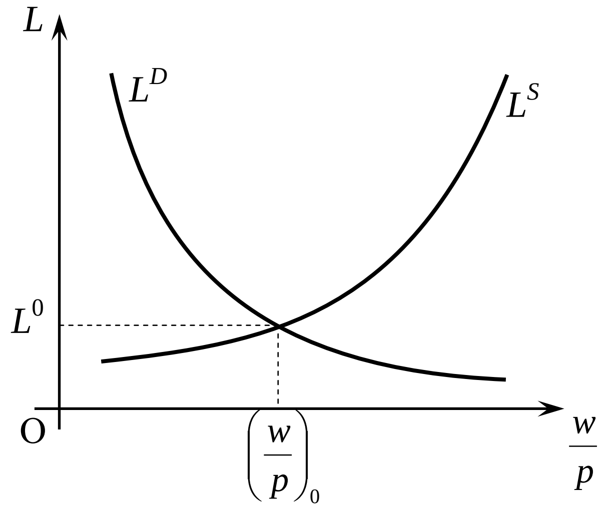


Рисунок 6.1. Равновесие на рынке рабочей силы.

Если реальная заработная плата превысит равновесное значение: $\frac{w}{p} > \left(\frac{w}{p}\right)_0$, то возникнет превышение предложения труда над спросом

$$L^S\left(\frac{w}{p}\right) > L^D\left(\frac{w}{p}\right).$$

Это приведет к падению заработной платы *w*, т. к. в ситуации вынужденной безработицы часть работников будет готова работать за меньшую плату. При этом цена *p* также упадет, но в меньшей степени, и, таким образом, реальная заработная плата снизится до значения $\left(\frac{w}{p}\right)_0$.

Аналогично, если реальная заработная плата ниже равновесного значения: $\frac{w}{p} < \left(\frac{w}{p}\right)_0$, то спрос на труд превысит предложение

$$L^S\left(\frac{w}{p}\right) < L^D\left(\frac{w}{p}\right).$$

Предпринимателям необходимо будет избежать оттока рабочей силы, и они вынуждены будут увеличивать заработную плату *w*. Таким образом, реальная заработная плата возрастет до значения $\left(\frac{w}{p}\right)_0$.

Подведем итог: в классической модели рынка рабочей силы в условиях совершенной конкуренции рыночные механизмы действуют в направлении установления равновесия.

Рынок денег.

Обозначим: Y – ВВП в натуральном исчислении.

- Спрос на деньги.

Анализ спроса на деньги в классической модели основан на гипотезе: *совокупный спрос на деньги* – это функция, прямо пропорциональная величине денежного дохода $Y{\cdot}p$:

$$M^D = k \cdot Y \cdot p, \tag{6.2}$$

где k – *коэффициент монетизации,*

M^D – количество денег в обращении.

Соотношение (6.2) записывают также в форме уравнения обмена

$$M^D \cdot V = Y \cdot p, \tag{6.3}$$

где V – скорость обращения денег, $V = \dfrac{1}{k}$.

Величина $\dfrac{M^D}{p}$ называется *реальными запасами денежных средств* или *реальными кассовыми остатками*. *Функция спроса* на реальные запасы денежных средств имеет вид

$$\frac{M^D}{p} = k \cdot Y \quad \text{или} \quad \frac{M^D}{p} = \frac{Y}{V}.$$

Спрос на деньги определяется величиной дохода и скоростью обращения денег.

- Предложение денег.

Предложение денег M^S в классической модели рассматривается как фиксированная, экзогенно заданная величина.

На рис. 6.2 представлены линии спроса и предложения денег. Каждому значению Y соответствует своя линия спроса, определяемая согласно (6.2).

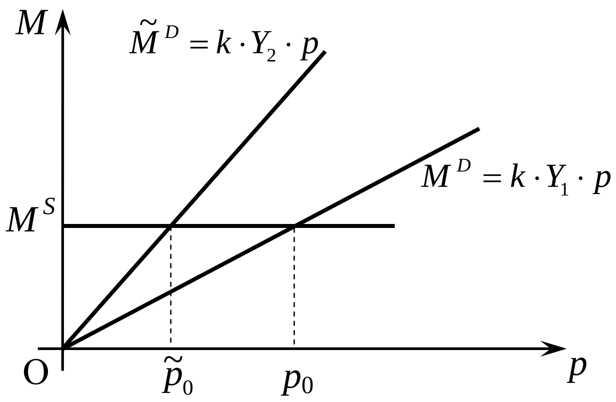


Рисунок 6.2. Равновесие на рынке денег.

- Равновесие на рынке денег.

Условие равновесия определяется равенством

$$M^S = M^D, \quad \text{т. е.} \quad M^S = k \cdot Y \cdot p_0,$$

где p_0 – равновесное значение цены.

Если при данном значении Y имеет место $p < p_0$, то имеется избыток денег $M^S - M^D(p)$. В этом случае постулируется, что цены возрастут до уровня p_0.

Рынок товаров.

Введем обозначения:

C – спрос на потребительские товары,

I – спрос на инвестиционные товары (товары, используемые для производства других товаров, например, оборудование),

r – процентная ставка (норма процента)[12].

- Спрос на товары.

Спрос на товары – это сумма спроса на потребительские и инвестиционные товары:

[12]Процентная ставка – это плата за деньги (в процентном выражении), предоставляемые в кредит. Может существовать множество процентных ставок в зависимости от условий кредитования, но все они находятся под воздействием рыночного механизма: с уменьшением предложения денег процентные ставки увеличиваются, и наоборот. Величина процентной ставки используется при *дисконтировании* - приведении стоимости всех выплат к определённому моменту времени.

$$E = C + I.$$

В основе классической теории лежит гипотеза о том, что и спрос на потребительские товары, и спрос на инвестиционные товары являются функциями нормы процента:

$$\boldsymbol{C} = C(r), \quad I = I(r),$$

причем $C(r)$ и $I(r)$ убывают с ростом r. Обоснованием этой гипотезы могут служить следующие рассуждения.

С одной стороны, чем больше величина r, тем больше доход от сбережений, поэтому с ростом r все бóльшая часть дохода будет сберегаться и меньшая – расходоваться на потребительские товары.

С другой стороны, чем больше r (ставка, применяемая при дисконтировании будущих расходов и приведении их к текущему времени), тем ниже привлекательность любого инвестиционного проекта; проекты, дающие прибыль при низких учетных ставках, при увеличении ставок становятся невыгодными.

Таким образом, $E(r) = C(r) + I(r)$ – убывающая функция аргумента r.

- Предложение товаров.

Предложение товаров определяется уровнем производства. В соответствии с классической моделью, уровень производства соответствует имеющимся производственным ресурсам (фондам и трудовым ресурсам). Если рассматривать все экономические процессы в краткосрочном периоде, то можно считать объемы ОПФ неизменными, и, следовательно, объем выпуска товаров определяется уровнем занятости.

Таким образом, *предложение товаров* в классической модели является функцией уровня занятости L^0, соответствующего равновесию на рынке труда:

$$Y = Y(L^0).$$

- Равновесие на рынке товаров.

Основой классической модели является так называемый закон Сэя, который в самой общей форме сводится к утверждению, что предложение товаров создает спрос. В соответствии с этим законом, не может быть разрыва между спросом на товары и их предложением в масштабах всей экономики (хотя в пределах одного или нескольких секторов допускаются расхождения). Из закона Сэя следует *условие равновесия* на рынке товаров:

$$Y(L^0) = C(r) + I(r).$$

(предложение товаров равно спросу на товары). Будем обозначать r^0 равновесное значение процентной ставки.

Взаимодействие рынков рабочей силы, денег и товаров.

В результате объединения моделей рынков труда, денег и товаров получим классическую модель рыночной экономики в полном объеме. Каждый рынок задается кривыми спроса и предложения и точкой равновесия.

Рынок рабочей силы:

$$L^D = L^D\left(\frac{w}{p}\right), \quad L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right),$$

$$L^D\left(\left(\frac{w}{p}\right)_0\right) = L^S\left(\left(\frac{w}{p}\right)_0\right) = L^0.$$

Рынок денег:

$$M^D = k \cdot Y \cdot p, \quad M^S = M^S,$$

$$M^D = M^S = k \cdot Y \cdot p_0.$$

Рынок товаров:

$$Y = Y\left(L^0\right), \quad E = C(r) + I(r),$$

$$Y\left(L^0\right) = C\left(r^0\right) + I\left(r^0\right) = Y^0.$$

Представленные девять уравнений содержат все основные переменные классической модели национальной экономики. Из первых трех уравнений однозначно определяется уровень полной занятости и равновесное значение реальной заработной платы. При известном значении L^0 уравнения модели рынка товаров позволяют однозначно определить объем выпуска товаров, равновесное значение нормы процента r^0 и равновесные уровни инвестиций и потребления. Далее, из уравнений модели рынка денег однозначно определяется уровень цен и, при известном значении реальной заработной платы – значение номинальной заработной платы *w*. Последовательность рассмотрения уравнений модели взаимодействия рынков показана на рис. 6.3.

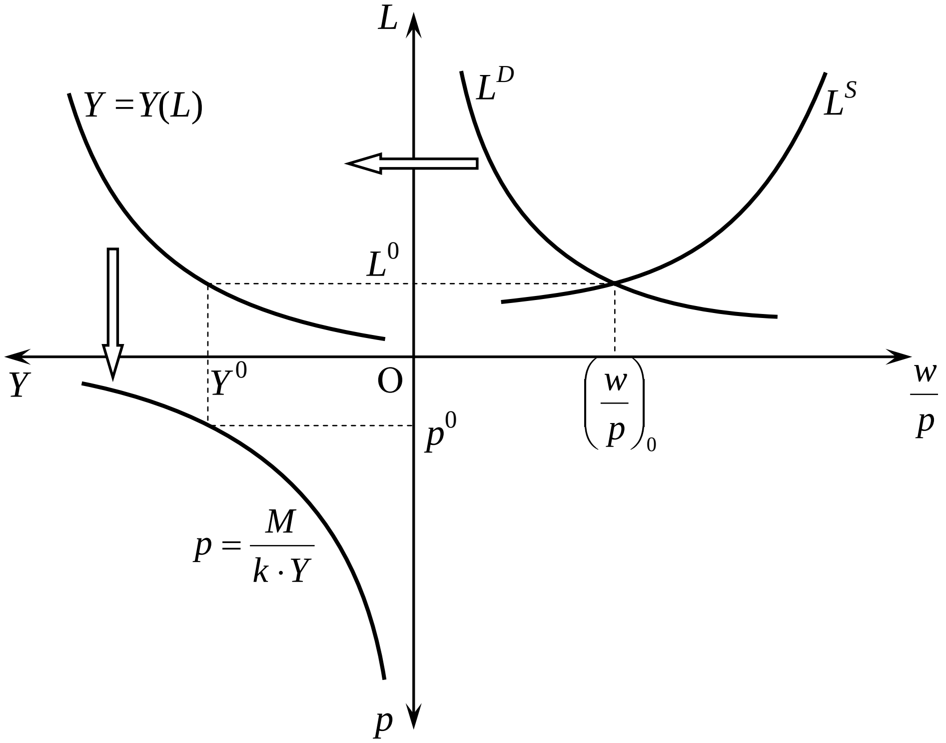


Рисунок 6.3. Взаимодействие трех рынков в классической модели.

Из проведенного анализа взаимодействия рынков следует, что денежная сфера экономической системы не оказывает влияния на реальные переменные (объем производства, уровень занятости и т. п.), а только способствует установлению уровня цен. Это положение в рамках классической теории выражается в *принципе классической дихотомии* (*нейтральности денег*). Согласно этому принципу, национальная экономика представляется в виде двух обособленных секторов: *реального сектора* (включающего движение реальных потоков товаров и услуг), и *денежного* (обращение денег, которое не оказывает непосредственного влияния на потоки товаров и услуг). Принцип нейтральности денег подразумевает, что величина денежной массы в стране не оказывает влияния на реальные макроэкономические показатели – ВВП, занятость, инвестиции (изменяются только их номинальные значения).

В рассматриваемой модели взаимодействия рынков предполагается в конечном итоге достижение равновесия на каждом из рынков. Если в силу каких-либо причин один из рынков выйдет из состояния равновесия, то и остальные рынки также выйдут из этого состояния. После этого рынки будут стремиться к некоторому новому состоянию динамического равновесия под действием описанных выше механизмов.

Таким образом, согласно классической теории, рыночный механизм сам способен исправлять дисбалансы, возникающие в масштабах национальной экономики:

- процентная ставка уравновешивает спрос и предложение инвестиционных средств;
- гибкая заработная плата уравновешивает спрос и предложение на рынке труда (длительное существование вынужденной безработицы невозможно);
- гибкие цены обеспечивают «очищение» рынка от продукции (длительное перепроизводство невозможно);
- увеличение денежной массы ничего не меняет в реальном потоке товаров и услуг (влияет только на номинальные стоимостные величины).

Итогом этих рассуждений является вывод: никаких затяжных экономических кризисов с высокой безработицей не должно быть. Такие взгляды господствовали в экономической науке до 30-х годов XX в., причем до первых десятилетий XX в. классическая теория служила достаточно хорошим инструментом для обоснования государственной экономической политики. Общий принцип этой политики – нейтральность по отношению к экономической деятельности частных лиц (физических и юридических). Согласно этому принципу, государство должно воздерживаться от непосредственного влияния на принятие решений экономическими субъектами, действующими в условиях конкуренции.

6.1.2 Модель Кейнса рыночной экономики

Классическая теория не смогла дать объяснений экономическим проблемам, возникшим после первой мировой войны, и, особенно, во время экономического кризиса 30-х годов XX в. («Великой депрессии»). Например, согласно классической теории, в Великобритании в 1931-1935 гг. не должна была существовать вынужденная безработица, однако в течение этого периода уровень безработицы не опускался ниже 20% [15].

Работа Дж. М. Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег» появилась в 1936 г. как ответ на проблемы, возникшие в связи с устойчивым и беспрецедентно длительным состоянием макроэкономического неравновесия (кризисом перепроизводства и массовой безработицей в период 1929-1933 гг.). В короткий срок идеи Кейнса были приняты широкими кругами экономистов, и экономическая политика большинства западных стран стала опираться на анализ моделей, предложенных Кейнсом.

Классическая модель давала ответ в задаче поиска равновесия в условиях полной занятости. Согласно теории Кейнса, равновесие при полной занятости не является общим случаем, т. к. в условиях господства монополий и профсоюзов цены и зарплата перестают быть подвижными. Общим случаем является равновесие при наличии безработицы (полная занятость может рассматриваться как частный случай). Для достижения полной занятости государство обязано проводить специальную политику.

Теория Кейнса построена на основе гипотезы, которая «переворачивает» закон Сэя. Если в соответствии с законом Сэя «предложение создает спрос», и, следовательно, вся произведенная продукция находит покупателя, то согласно гипотезе Кейнса, связь обратная: «спрос создает предложение». Более содержательно это допущение может быть сформулировано так: при наличии избыточного спроса производителям выгодно расширять производство. Эта гипотеза позволяет построить систему моделей, объясняющих функционирование рыночной экономики. К их числу относится, в частности, простейшая динамическая модель Кейнса, которая рассматривалась в разделах 3.1.1, 3.2.2 и 3.2.4.

Далее в этом разделе будут представлены основные положения теории Кейнса. Будем рассматривать их с позиций сопоставления с положениями классической теории.

В модели Кейнса предполагается существование рынка денег (отличного от рынка облигаций), на котором рассматривается три вида активов: деньги, облигации и физический капитал (имеющийся запас инвестиционных товаров). Предполагается, что в условиях равновесия норма прибыли на физический капитал (т. е. среднегодовые процентные поступления, получаемые в результате использования капитала) равна ставке дохода по облигациям. Таким образом, модель Кейнса, в отличие от классической модели, дает возможность проследить влияние денежно-кредитной политики на производство. Например, увеличение денежной массы за счет эмиссии денег изменяет пропорции обмена между деньгами и облигациями. При возрастании количества денег их будут хранить только при снижении нормы процента на облигации (которые являются альтернативным видом активов). При этом норма прибыли также должна снизиться.

Рассмотрим задачу максимизации прибыли по отношению к капиталу (ОПФ) при фиксированном уровне занятости. Прибыль производителей равна

$$\Pi = p \cdot F(K, L) - w \cdot L - r \cdot K.$$

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p \cdot \frac{\partial F}{\partial K} - r = 0.$$

Для неоклассической ПФ $F(K, L)$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} = p \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0.$$

С учетом этого получим достаточное условие экстремума

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial K} = r, \qquad (6.4)$$

т. е. предельная производительность фондов в стоимостном выражении равна ставке процента (нормы прибыли).

Из (6.4) следует, что падение нормы прибыли означает падение предельного продукта капитала (при неизменных ценах). Поскольку предельный продукт капитала уменьшается с ростом K $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0\right)$, это, в свою очередь, означает увеличение спроса на инвестиционные товары, а, следовательно, и на товары в целом.

Таким образом, проследив все взаимосвязи, можно сделать вывод, что сравнительно небольшое увеличение денежной массы приводит к росту спроса на товары, а, следовательно, к росту предложения товаров (т. е. к увеличению конечного продукта).

Рассмотрим, к каким изменениям в описании рынка труда (по сравнению с классической моделью) приведут принятые Кейнсом предположения. Как было показано в разделе 6.1.1, в классической теории равновесие рынка труда наступает при полной занятости; равновесное значение реальной заработной платы определяется из соотношения $L^D\left(\left(\frac{w}{p}\right)_0\right) = L^0$; при этом конечный продукт равен $Y^0 = F(K, L^0)$.

Предположим, что спрос на товары по некоторым причинам оказался меньше, чем Y^0: $E < Y^0$. В этом случае, в соответствии с гипотезой Кейнса, фактически произведенный объем конечного продукта Y будет равен объему спроса:

$$Y = E, \quad \text{т. е.} \quad Y < Y^0.$$

Меньший объем продукта Y может быть произведен при уровне занятости $L < L^0$. Таким образом, в отличие от классической модели, в модели Кейнса уровень занятости определяется не реальной заработной платой, а уровнем спроса на товары. При этом величина $L^0 - L$ определяет тот уровень безработицы, который диктуется рынками денег и товаров.

Подводя итоги, можно сформулировать основные отличия положений теории Кейнса по сравнению с классической теорией:

- равновесие на рынке товаров достигается при равенстве планируемого спроса и фактического предложения;
- фактический спрос на рабочую силу определяется фактически востребованным продуктом, следовательно, равновесие на рынке труда может быть достигнуто только тогда, когда рынок товаров находится в равновесии.

Основные соотношения модели Кейнса.

Обозначим:

$Lq(r)$ – спрос на облигации (является функцией процентной ставки).

В целом модель Кейнса может быть описана следующими основными соотношениями.

Рынок рабочей силы:

$$L^S = L^S\left(\frac{w}{p}\right), \quad L^D = L^D\left(Y^0\right).$$

Рынок денег:

$$M^S = M^S, \quad M^D = k \cdot Y \cdot p + Lq(r), \quad \frac{dLq}{dr} < 0,$$

$$M^D = M^S.$$

Рынок товаров:

$$Y = Y(L), \quad E = C(Y) + I(r), \quad \frac{dC}{dY} > 0, \quad \frac{dI}{dr} < 0,$$

$$Y = E.$$

Установление равновесия на рынке товаров рассмотрим в предположении, что зависимости $C(Y)$ и $I(r)$ – линейные:

$C(Y) = a + b{\cdot}Y, \quad a > 0, \ 0 < b < 1,$

спрос на потребительские товары линейно растет с ростом предложения товаров;

$I(r) = d - f{\cdot}r, \quad d > 0, f > 0,$

спрос на инвестиционные товары линейно убывает с ростом нормы процента.

Тогда условие равновесия запишется в виде:

$$Y^G = a + b \cdot Y^G + d - f \cdot r,$$

откуда

$$Y^G = \frac{a+d}{1-b} - \frac{f}{1-b} \cdot r.$$

Зависимость, определяющая равновесие на рынке товаров, – линейно убывающая функция r, следовательно, при фиксированном значении r имеется единственное равновесное значение $Y^G(r)$. В литературе график этой зависимости часто называется «кривой *IS*».

Предположим теперь, что зависимость $Lq = Lq(r)$ также является линейной:

$$Lq(r) = h - j \cdot r, \quad h > 0, \; j > 0,$$

и запишем условие равновесия на рынке денег:

$$M^S = k \cdot Y^M \cdot p + h - j \cdot r,$$

откуда

$$Y^M = \frac{M^S - h}{k \cdot p} + \frac{j}{k \cdot p} \cdot r.$$

Зависимость, определяющая равновесие на рынке денег – линейно возрастающая функция r, следовательно, при фиксированном значении r имеется единственное равновесное значение $Y^M(r)$. В литературе график этой зависимости называется «кривой *LM*».

Общее равновесие на рынках денег и товаров характеризуется выполнением условия

$$Y^G(r_0) = Y^M(r_0) = Y^0,$$

причем точка равновесия (Y^0, r_0) единственна. Это состояние равновесия однозначно определяет фактическую потребность в рабочей силе L^0, исходя из соотношения

$$Y^0 = F(K, L^0).$$

Общая картина установления равновесия на рынках товаров, денег и рабочей силы показана на рис. 6.4.

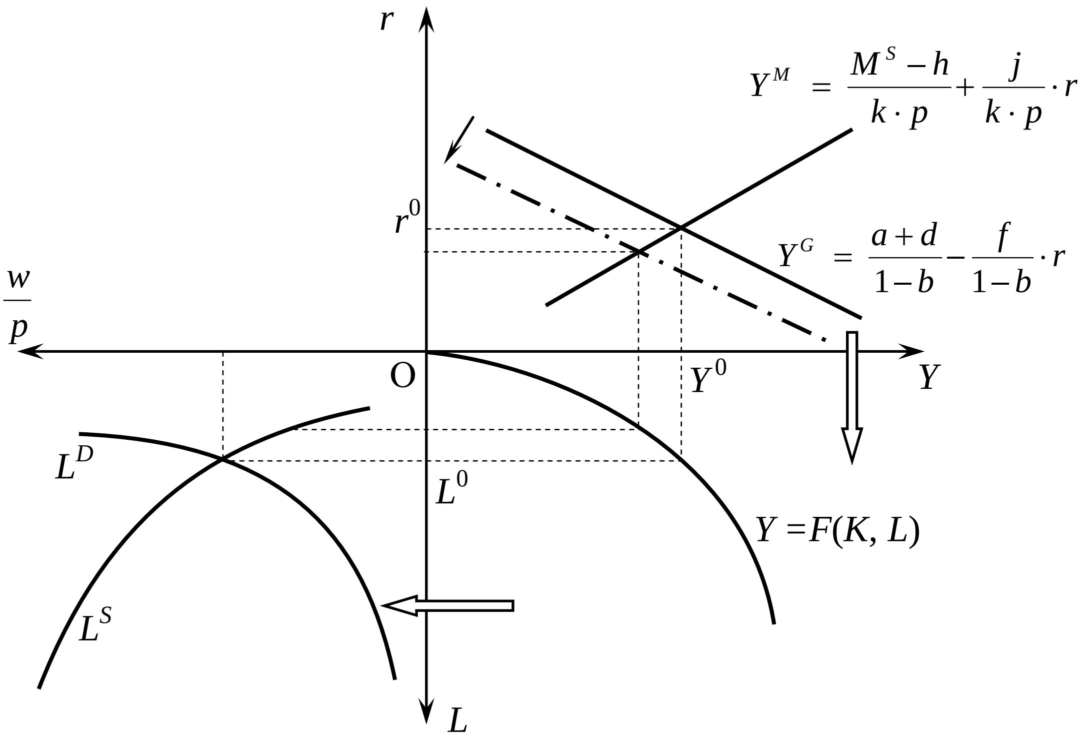


Рисунок 6.4. Установление равновесия в модели Кейнса.

- Определяется точка общего равновесия (Y^0, r_0) на рынках денег и товаров (точка пересечения кривых *IS* и *LM*).
- По графику ПФ с учетом (6.4) находится уровень занятости L_0, необходимый для производства благ в объеме Y^0.
- Из (6.1) при Y^0 и L_0 определяется максимальная ставка реальной заработной платы, которую предприниматели готовы платить при данной технологии.

Если эффективный спрос меньше совокупного спроса при полной занятости (штрихпунктирная линия на рис. 6.4), то равновесие на всех рынках устанавливается при наличии безработицы на рынке труда: $L^S < L^D = L_0$. В этом случае полную занятость можно обеспечить только при увеличении эффективного спроса. Этого можно достичь путем государственного регулирования: за счет увеличения государственных расходов, снижения налогов, увеличения дефицита государственного бюджета в длительном периоде (следствием чего будет инфляция и снижение реальной заработной платы).

Монетаристский подход.

Коррекцией подхода Кейнса является монетаристский подход, развитый в 70-е гг. XX в. М. Фридменом. Сравнение этих двух подходов показывает, как различия в исходных допущениях вызывают разные последствия в экономической политике: кейнсианцы считают наиболее эффективными орудиями контроля экономической деятельности те, которые оказывают влияние на совокупный спрос на товары; монетаристы считают основой экономической политики контроль над предложением денег (денежной массой).

Инструментальным средством анализа в монетаристском подходе, так же как в кейнсианском, является аппарат кривых IS и LM. Главные расхождения между подходами связаны со спецификацией функции спроса на деньги [15]. Монетаристы считают, что спекулятивный спрос на деньги не зависит от ставки процента, поэтому увеличение предложения денег приводит к росту цен, но не объемов производства, как это было в модели Кейнса (кривая LM в этом случае расположена вертикально). Вследствие этого, денежно-кредитная политика не может повлиять в долгосрочном плане на реальный объем производства и безработицу.

Практический опыт многих государств показывает, что в ряде ситуаций оправдываются прогнозы, полученные на основе теории Кейнса, в других случаях – подход Фридмена. В случае небольшой и контролируемой государством инфляции работает кейнсианский подход, в случае гиперинфляции и слабого контроля государства – преимущество у монетаристского подхода.

<u>Замечание</u>. Рассмотренные в данном разделе модели относятся к классу моделей краткосрочного прогнозирования, в которых прирост производства возможен только за счет существующих резервов в пределах множества производственных возможностей национальной экономики. Поэтому в [15]

подчеркивается, что для анализа макроэкономических процессов в странах с реформируемой экономикой эти модели должны быть дополнены компонентами, отражающими динамику факторов производства, его структуру, структуру занятых, зависимость капиталовложений не только от ставки процента, но и от уровня инфляции и т. п.

6.2 Математические модели финансового рынка

Финансовый рынок – это рынок, на котором товарами являются

- деньги,
- банковские кредиты,
- ценные бумаги.

К ценным бумагам относят облигации, акции, фьючерсы[13] и опционы[14].

В зависимости от вида товаров финансовый рынок разделяется на следующие рынки:

- *денежный,*
- *кредитный,*
- *фондовый.*

Кредитный и фондовый рынки вместе образуют *рынок капитала*.

При нормальном функционировании рыночной экономики финансовый рынок обслуживает производственную систему: способствует продвижению продуктов производства (товаров) к потребителям. Переход товара от одного владельца к другому сопровождается встречным потоком денежных выплат. Денежные выплаты, как правило, производятся в безналичной форме при посредничестве банков.

Банки обслуживают как сферу обращения, так и производственную систему. В первом случае (в сфере обращения) банки аккумулируют

- наличную выручку розничной торговли и сферы обслуживания (которая возвращается на предприятия и в систему социальной защиты

[13] Фьючерс – это обязательство продавца поставить к определенному сроку определенное количество товара.
[14] Опцион – это право на покупку в будущем определенного количества товара по фиксированной цене.

для выплаты зарплаты, пенсий, пособий);

- сбережения населения (отложенный спрос).

Взаимодействие с производственной системой выражается в предоставлении банками кредитов производителям. Заемные средства необходимы производителям прежде всего потому, что материальные затраты должны быть совершены раньше, чем будет произведена и реализована продукция, и, следовательно, чем будет получен доход. Кроме того, кредиты необходимы для модернизации и расширения производственных мощностей.

В случае нехватки собственных средств коммерческие банки берут в долг у других банков (прежде всего, государственных). Государственные банки

- образуют государственную резервную систему;
- аккумулируют налоговые поступления;
- осуществляют выплату зарплаты работникам бюджетной сферы, пенсий, пособий.

В случае нехватки средств в государственных банках государство проводит дополнительную денежную эмиссию или выпускает государственные займы. При избыточном количестве денег в обращении денежная эмиссия приводит к инфляции.

6.2.1 Финансовые операции

Простейшая финансовая операция.

Простейшим видом финансовой операции является *предоставление в долг* некоторой суммы $S(0)$ с условием, что через промежуток времени T (измеряемый, как правило, в годах) будет возвращена сумма $S(T)$. В результате этой операции кредитор получит прибыль, равную $S(T) - S(0)$. Значение $S(T) - S(0)$ само по себе (без учета величины выданной суммы) не позволяет судить об эффективности данной операции. Рассмотрим несколько показателей эффективности простейшей финансовой операции.

- Прибыль в расчете на единицу кредита.

  Величина

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}$$

  называется *эффективностью операции* (с точки зрения кредитора) или *процентной ставкой* (*ставкой процента*) или ростом (деньги отданы в рост).

- Прибыль в расчете на единицу возвращаемой суммы.

  Величина

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}$$

  называется *дисконтом*.

Процентная ставка и дисконт обычно выражаются в процентах, но при выполнении расчетов необходимо использовать их значения, выраженные в долях. Возвращаемая сумма, процентная ставка и дисконт связаны следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} r_T = \frac{d_T}{1 - d_T}, \quad d_T = \frac{r_T}{1 + r_T}, \\ S(T) = S(0)(1 + r_T), \quad S(0) = S(T)(1 - d_T). \end{gathered} \tag{6.5}$$

Обозначим:

r – процентная ставка за год (при $T = 1$);

d – дисконт за год.

Тогда расчет величин r_T и d_T может осуществляться по схеме простых или сложных процентов либо по их комбинации.

Формула расчета по *простым процентам* имеет вид:

$$r_T = T \cdot r.$$

Схема сложных процентов обычно применяется при расчете по долгосрочным кредитам на целое число лет. Расчетная формула в этом случае имеет вид:

$$1 + r_T = (1 + r)^T.$$

При расчетах по кредитам на нецелое число лет иногда применяется *комбинированная схема*: за целое число лет расчет производится по схеме сложных процентов, за остаток – по формуле простых процентов. Итоговая расчетная формула приобретает вид:

$$1+r_T = (1+r)^{[T]}(1+r\cdot\{T\}),$$

где

$[T]$ – целая часть T (целое число лет в T),

$\{T\}$ – дробная часть T; $T = [T] + \{T\}$.

Пример. Сумма, помещенная в банк, составляет 100 тыс. ден. ед. Ежемесячно на эту сумму выплачивается 1,6%. Требуется узнать, через сколько месяцев ежемесячный платеж составит не менее 2 тыс. ден. ед.

В данном случае процентная ставка указана не за год, а за месяц, и составляет r = 0,016. В расчетах необходимо учитывать, что T измеряется в месяцах.

Сумма, накопленная через T месяцев, будет равна

$$100\cdot(1+r)^T \quad \text{(тыс. ден. ед.)},$$

прирост этой суммы за 1 месяц (ежемесячный платеж) составит

$$100\cdot(1+r)^T\cdot r \quad \text{(тыс. ден. ед.)}.$$

По условию требуется найти минимальное целое T, для которого справедливо

$$100\cdot(1+r)^T\cdot r \geq 2.$$

Отсюда

$$(1+0{,}016)^T \geq \frac{2}{100\cdot 0{,}016} = \frac{2}{1{,}6} = 1{,}25;$$

и, после логарифмирования,

$$T \geq \frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}016} \approx 14{,}06.$$

Минимальное целое значение T, для которого выполняется требуемое условие, равно 15. Это означает, что через 15 месяцев ежемесячная выплата составит не менее (точнее сказать, более) 2 тыс. ден. ед.

Следует отметить, что в данном случае величина в правой части последнего неравенства лишь незначительно больше 14. Поэтому, хотя T = 14, строго говоря, не соответствует требованию задачи, можно предположить, что через 14 месяцев сумма платежа будет лишь незначительно меньше желаемой суммы. Проверим это:

$$100 \cdot (1 + 0{,}016)^{14} \cdot 0{,}016 \approx 1{,}9982 \text{ (тыс. ден. ед.)}$$

Если в задаче допустимо округление до двух знаков после запятой, то уже через 14 месяцев ежемесячный платеж составит 2 тыс. ден. ед.

Введем еще один показатель эффективности простейшей финансовой операции.

- Величина

$$V_T = \frac{1}{1+r_T} = 1-d_T .$$

называется *дисконт-фактором*.

Если обозначить V – дисконт-фактор за год, то при расчете по сложным процентам за целое число лет T

$$V_T = \frac{1}{(1+r)^T} = (1-d)^T = V^T .$$

Эффективной ставкой называется годовая ставка по схеме сложных процентов, которая обеспечивает заданное соотношение между возвращаемой суммой $S(T)$ и кредитом $S(0)$. Эффективная ставка определяется из соотношения

$$(1+r_{ef})^T = \frac{S(T)}{S(0)},$$

откуда

$$r_{ef} = \left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{T}} - 1. \tag{6.6}$$

Поток платежей.

До сих пор рассматривалась простейшая финансовая операция. Более сложной финансовой операцией является *поток платежей*. Рассмотрим эту операцию подробнее.

Такие виды операций, как получение заемных сумм, выплаты по кредиту, операции с ценными бумагами, могут быть распределены во времени, в результате чего возникает поток платежей. Если рассматривать этот поток с позиций одного из участников, то естественно считать все поступления положительными величинами, а все выплаты – отрицательными. Итоговый результат такой распределенной во времени операции определяется путем приведения всех платежей (с учетом знака) к начальному моменту времени. Числовой характеристикой результата операции является *чистая приведенная величина NPV* (*net present value*), равная

$$NPV = \sum_{k=1}^{N} S_k \cdot V_{t_k} = \sum_{k=1}^{N} S_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}}, \qquad (6.7)$$

где

$t_1, t_2, \ldots t_N$ – моменты платежей,

$S_1, S_2, \ldots S_N$ – размеры платежей,

V_{t_k} – дисконт-фактор в момент времени t_k.

При этом $t_1 = 0$ (момент первого платежа принимается за начало отсчета).

Пример. Контракт между фирмой *А* и банком *Б* предусматривает, что банк предоставляет фирме кредит в течение 3 лет ежегодными платежами в 1 млн. ден. ед. в начале каждого года при 10% ставке годовых. Фирма возвращает долг следующим образом: в конце третьего года – 1 млн. ден. ед., четвертого года – 2 млн. ден. ед., пятого года – 1 млн. ден. ед. Требуется выяснить, приемлема ли такая операция для банка.

В соответствии с (6.7),

$$NPV = -1 - \frac{1}{1+0{,}1} - \frac{1}{(1+0{,}1)^2} + \frac{1}{(1+0{,}1)^3} + \frac{2}{(1+0{,}1)^4} + \frac{1}{(1+0{,}1)^5} \approx$$
$$\approx 0{,}0027 > 0,$$

откуда следует, что операция является приемлемой для банка.

Для сравнения финансовых операций между собой используется показатель *эффективная ставка операции*. Это ставка, которая обеспечивает минимальное из приемлемых значений *NPV* (*NPV* = 0). По определению, значение эффективной ставки операции должно являться корнем уравнения

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k}{\left(1+r_{ef}\right)^{t_k}} = 0, \quad t_1 = 0. \tag{6.8}$$

В частности, для простейшей финансовой операции

$$-S(0)+\frac{S(T)}{\left(1+r_{ef}\right)^{T}} = 0,$$

откуда $r_{ef} = \left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$, что совпадает с (6.6).

В случае, когда платежи совершаются ежедневно, причем много раз в течение дня, удобно рассматривать накопленную сумму $S(t)$ таких платежей как функцию непрерывного времени t. В таком случае показатели эффективности операции должны определяться с учетом непрерывности $S(t)$. Для непрерывного потока платежей вводятся следующие числовые показатели.

- *Мгновенная скорость роста* – это величина, равная

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}.$$

- *Сила роста* – величина, равная

$$\delta(t) = \frac{\frac{dS}{dt}}{S(t)} = \frac{d}{dt}\left(\ln S(t)\right). \tag{6.9}$$

Если сила роста $\delta(t)$ задана, то накопленная сумма $S(T)$ определяется путем решения дифференциального уравнения (6.9) с начальным условием $S(0) = S_0$:

$$S(T) = S(0)\cdot e^{\int_0^T \delta(t)dt}. \tag{6.10}$$

Из (6.5)

$$S(T) = S(0)(1+r_T).$$

Сопоставляя это с (6.10), получим:

$$1+r_T = e^{\int_0^T \delta(t)dt}.$$

При $\delta(t) = \delta = const$

$$1+r_T = e^{\delta \cdot T},$$

откуда

$$\delta = \frac{1}{T}\ln(1+r_T).$$

При использовании схемы сложных процентов с годовой ставкой r

$$\delta = \frac{1}{T}\ln(1+r)^T = \ln(1+r).$$

При малых значениях r можно считать[15] $\delta \approx r$.

6.2.2 Финансовый риск

Понятие финансового риска.

Введенные выше показатели эффективности финансовых операций рассматривались как детерминированные величины. В действительности большинство финансовых операций являются рискованными: их эффективность однозначно не задана на момент заключения сделки. Особенно это относится к операциям с ценными бумагами, прежде всего, с акциями. В связи с этим возникает необходимость количественной оценки степени рискованности операции.

Оценка рискованности финансовых операций основана на следующем предположении: эффективность операции R является случайной величиной, а наблюдаемые в действительности значения r – это отдельные возможные значения случайной величины R. При таком подходе под *риском* можно понимать вероятность любого нежелательного для инвестора события (например, вероятность разорения).

---

[15] Использован известный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, из которого следует $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Важной характеристикой неопределенности результата операции (и, следовательно, рискованности этой операции) служит дисперсия ее эффективности R: чем меньше дисперсия, тем меньше неопределенность результата.

Пусть возможны две альтернативные финансовые операции с эффективностями R_1 и R_2, имеющими следующие характеристики:

1) $M(R_1) = m_1, \quad D(R_1) = \sigma_1^2$,

2) $M(R_2) = m_2, \quad D(R_2) = \sigma_2^2$,

причем $m_1 < m_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$. В этом случае инвестор, склонный к риску, выберет вторую операцию (как более эффективную в среднем), в то время как осторожный инвестор выберет первую (как менее рискованную, хотя и менее эффективную в среднем).

Система мер, направленная на снижение риска при выполнении финансовых операций, называется *хеджированием*. Одним из способов хеджирования является оптимизация портфеля ценных бумаг инвестора.

Оптимизация портфеля ценных бумаг.

При вложении денежных средств в акции одной компании результат операции зависит от курсовых колебаний этих акций. При инвестировании в акции нескольких компаний эффективность сформированного портфеля ценных бумаг зависит от усредненного курса акций, а степень неопределенности (риска) – от усредненной дисперсии. Если усредненная дисперсия меньше дисперсий курсов акций отдельных компаний, то степень рискованности операции уменьшается. Оптимальным будет портфель с наименьшей усредненной дисперсией, при условии, что усредненная эффективность является приемлемой для инвестора.

Формализуем эту ситуацию. Пусть имеются n видов ценных бумаг, из которых инвестор может сформировать портфель. Эти бумаги характеризуются эффективностями R_1, R_2, …, R_n, которые являются случайными величинами с известными математическими ожиданиями m_1,

$m_2, \dots m_n$; кроме того, известна ковариационная матрица $B = \left\| \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right) \right\|$.

Если инвестор распределяет свой капитал долями

$$\theta_i, \; i = 1, 2, \; \dots, \; n, \qquad 0 \le \theta_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

в различные ценные бумаги, то эффективность сформированного портфеля описывается случайной величиной

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot R_i,$$

числовые характеристики которой равны

$$M\left(R_p\right) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot M\left(R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot m_i,$$

$$\sigma^2\left(R_p\right) = D\left(R_p\right) = D\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot R_i\right) =$$

$$= \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot R_i, \; \sum_{j=1}^{n} \theta_j \cdot R_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_i \cdot \theta_j \cdot \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right).$$

Поскольку ковариационная матрица была обозначена через B, то $\operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right)$, т. е. элемент этой матрицы, стоящий в i-й строке и j-м столбце, будем обозначать b_{ij}: $b_{ij} = \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right)$.

Распределение

$$\left(\theta_1, \theta_2, \; \dots, \; \theta_n\right), \qquad 0 \le \theta_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

называется *структурой портфеля ценных бумаг*.

Задача минимизации неопределенности эффективности портфеля сводится к следующей оптимизационной задаче:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_i \cdot \theta_j \cdot b_{ij} \quad \to \quad \min, \tag{6.11}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \theta_i = m_p, \end{cases} \qquad (6.12)$$
$$\theta_1 \ge 0,\ \theta_2 \ge 0,\ \ldots,\ \theta_n \ge 0,$$

где m_p – выбранное инвестором значение средней эффективности портфеля.

С математической точки зрения, это задача на минимизацию квадратичной формы от переменных θ_1, θ_2, …, θ_n, связанных двумя соотношениями

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \theta_i = m_p, \end{cases}$$

и условиями неотрицательности, т. е. задача *квадратичного программирования*. Для ее решения сначала отбросим условия неотрицательности. Построим функцию Лагранжа и сведем рассматриваемую задачу к задаче безусловной оптимизации:

$$L(\theta_1, \theta_2,\ \ldots,\ \theta_n, \lambda, \mu) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta_i \cdot \theta_j \cdot b_{ij} + \lambda\left(-\sum_{i=1}^{n}\theta_i + 1\right) + \mu\left(-\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \theta_i + m_p\right) \quad \to \quad \min.$$

Поскольку частные производные функции Лагранжа по переменным θ_1, θ_2, …, θ_n равны

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 2\sum_{j=1}^{n} \theta_j \cdot b_{kj} - \lambda - \mu \cdot m_k, \quad k = 1, 2,\ \ldots,\ n,$$

то необходимые условия экстремума определяются системой уравнений

$$\begin{cases} 2\sum_{j=1}^{n} \theta_j \cdot b_{ij} - \lambda - \mu \cdot m_i = 0, \quad i = 1, 2,\ \ldots,\ n, \\ \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \theta_i = m_p. \end{cases} \qquad (6.13)$$

Обозначим:

$$\overline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdots \\ \theta_n \end{pmatrix}, \quad \overline{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (6.13) запишется в матричной форме:

$$\begin{cases} B \cdot \overline{\theta} \; = \; \dfrac{\lambda}{2} \cdot \overline{e} + \dfrac{\mu}{2} \cdot \overline{m}, \\ \overline{e}^T \cdot \overline{\theta} \; = \; 1, \\ \overline{m}^T \cdot \overline{\theta} \; = \; m_p \, . \end{cases} \qquad (6.13')$$

Предположим, что между эффективностями R_1, R_2, … R_n нет линейной связи, и матрица B невырождена. Тогда существует матрица B^{-1}, и из первого уравнения (6.13')

$$\overline{\theta} \; = \; \frac{\lambda}{2} \cdot B^{-1} \cdot \overline{e} + \frac{\mu}{2} \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}. \qquad (6.14)$$

Подставим (6.14) во второе и третье уравнения (6.13'):

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}\left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) + \dfrac{\mu}{2} \cdot \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) \; = \; 1, \\ \dfrac{\lambda}{2}\left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) + \dfrac{\mu}{2} \cdot \left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) \; = \; m_p \, . \end{cases}$$

Получена система линейных уравнений относительно неизвестных λ и μ. Ее решение может быть найдено по теореме Крамера:

$$\frac{\lambda}{2} \; = \; \frac{\left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) - m_p \cdot \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)}{\left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) \cdot \left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) - \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)^2},$$

$$\frac{\mu}{2} \; = \; \frac{m_p \cdot \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) - \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)}{\left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) \cdot \left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) - \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)^2}.$$

Замечание. При нахождении решения была использована симметричность матрицы B: $\left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) \cdot \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) \; = \; \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)^2$.

Подставив найденное решение в (6.14), получим следующую структуру оптимального портфеля:

$$\overline{\theta}^* =$$

$$= \frac{\left(\left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) - m_p \cdot \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)\right) \cdot B^{-1} \cdot \overline{e} + \left(m_p \cdot \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) - \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)\right) \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}}{\left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) \cdot \left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) - \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)^2}. \tag{6.15}$$

Учитывая, что решение (6.15) задачи (6.11) – (6.12) было найдено без учета условий неотрицательности переменных, может оказаться, что в полученном решении некоторые $\theta_i < 0$. В этом случае следует исключить из портфеля ценные бумаги, соответствующие максимальным по модулю отрицательным компонентам, и повторить расчет для портфеля, включающего оставшиеся бумаги.

Минимальная дисперсия, соответствующая оптимальной структуре портфеля, имеет вид

$$\left(\sigma_p^*\right)^2 = \left(\overline{\theta}^*\right)^T \cdot B \cdot \overline{\theta}^* =$$
$$= \frac{m_p^2\left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) - 2m_p\left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) + \left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)}{\left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e}\right) \cdot \left(\overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right) - \left(\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m}\right)^2}. \tag{6.16}$$

Если случайные величины R_1, R_2, …, R_n некоррелированны, то ковариационная матрица B и обратная ей матрица B^{-1} диагональны:

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}, \qquad \overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{\sigma_i^2},$$

$$\overline{e}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{m} = \overline{m}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i^2},$$

и выражения для $\overline{\theta}^*$ существенно упрощаются:

$$\theta_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - m_p)(m_i - m_k)}{\sigma_i^2}}{\sigma_k^2 \cdot \sum_{i<j} \frac{(m_i - m_j)^2}{\sigma_i^2 \cdot \sigma_j^2}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.17}$$

<u>Пример</u>. Инвестор может составить портфель из трех видов ценных бумаг, эффективности которых R_1, R_2, R_3 являются некоррелированными случайными величинами со следующими числовыми характеристиками (в процентах от цены покупки):

$$M(R_1) = 11,\ \sigma_1 = 4;\quad M(R_2) = 10,\ \sigma_2 = 3;\quad M(R_3) = 9,\ \sigma_3 = 1.$$

Определим оптимальный портфель при $m_p = 10$.

Требуется найти структуру портфеля

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \qquad 0 \le \theta_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} \theta_i = 1,$$

при которой эффективность портфеля $R_p = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \cdot R_i$ имеет математическое ожидание

$$M(R_p) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \cdot M(R_i) = 11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10,$$

и минимальную (при указанных условиях) дисперсию

$$\sigma^2(R_p) = D\left(\sum_{i=1}^{3} \theta_i \cdot R_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^2 D(R_i) = 16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2 .$$

Получена следующая задача квадратичного программирования:

$$16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2 \quad \to \quad \min,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1, \\ 11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10, \\ \theta_1 \ge 0,\ \theta_2 \ge 0,\ \theta_3 \ge 0. \end{cases}$$

Т. к., по условию, случайные величины R_1, R_2, R_3 некоррелированы, то для определения вектора $\overline{\theta}\,*$ можно сразу воспользоваться формулами (6.17). Тем не менее, в учебных целях, проиллюстрируем на примере данной задачи основные этапы определения оптимального портфеля (для общего случая).

Отбросим условия неотрицательности и составим функцию Лагранжа:

$$L(\theta_1, \theta_2,\ \theta_3, \lambda, \mu) =$$
$$= 16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2 + \lambda(1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) + \mu(10 - (11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3)).$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 32\theta_1 - \lambda - 11\mu, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 18\theta_2 - \lambda - 10\mu, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 2\theta_3 - \lambda - 9\mu.$$

Тогда система (6.13), которая определяет необходимые (и достаточные) условия экстремума, имеет вид:

$$\begin{cases} 32\theta_1 - \lambda - 11\mu = 0, \\ 18\theta_2 - \lambda - 10\mu = 0, \\ 2\theta_3 - \lambda - 9\mu = 0, \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1, \\ 11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений

$$\theta_1 = \frac{1}{32}\lambda + \frac{11}{32}\mu, \quad \theta_2 = \frac{1}{18}\lambda + \frac{10}{18}\mu, \quad \theta_3 = \frac{1}{2}\lambda + \frac{9}{2}\mu.$$

Подставим эти выражения в последние два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{169}{288}\lambda + \dfrac{1555}{288}\mu = 1, \\ \dfrac{1555}{288}\lambda + \dfrac{14353}{288}\mu = 10, \end{cases}$$

откуда $\lambda \approx -45{,}17$; $\mu \approx 5{,}09$; и структура портфеля имеет вид:

$$\theta_1^* = 0{,}34; \quad \theta_2^* = 0{,}32; \quad \theta_3^* = 0{,}34.$$

Поскольку все компоненты вектора $\bar{\theta}*$ положительны, найденное решение удовлетворяет всем ограничениям задачи и, следовательно, определяет оптимальный портфель ценных бумаг. Дисперсия оптимального портфеля равна

$$(\sigma_p^*)^2 = 16(\theta_1^*)^2 + 9(\theta_2^*)^2 + (\theta_3^*)^2 \approx 2{,}89.$$

Таким образом, дисперсия эффективности оптимального портфеля существенно меньше дисперсии эффективности портфеля, в который входят только бумаги второго вида $\left(\sigma_2^2 = 9\right)$; при этом средняя эффективность обоих портфелей одна и та же.

Модификация портфеля ценных бумаг.

Инвестор, наряду с покупкой ценных бумаг, может делать вложения, не связанные с риском. Обозначим

r_0 – эффективность безрисковой части портфеля, $r_0 < \min_i m_i$;

θ_0 – доля безрисковой части портфеля.

Задача минимизации дисперсии эффективности портфеля, включающего безрисковую часть, при заданной средней эффективности этого портфеля m_p может быть сведена к задаче квадратичного программирования путем модификации рассмотренной выше задачи (6.11) – (6.12). Выполнение указанной модификации и исследование полученной модели, с одной стороны, имеет важное практическое значение, а с другой стороны, представляет собой полезное упражнение в области математического моделирования финансовых рисков. Поэтому рекомендуется выполнить построение и исследование модели оптимизации портфеля, содержащего безрисковую часть, самостоятельно (см. задание 3 для самостоятельного выполнения). В случае затруднений можно обратиться, например, к учебнику [1]. В данном изложении укажем лишь на следующие моменты.

В целом анализ модифицированной задачи (с учетом безрисковых вложений) аналогичен анализу задачи (6.11) – (6.12). При этом, с учетом предположения $r_0 < \min_i m_i$, представляет интерес ответ на следующий вопрос: при каких условиях безрисковая часть вложений войдет в оптимальный портфель. Другими словами, при каких условиях $\theta_0^* > 0$.

Можно показать, что в случае некоррелированности случайных величин R_1, R_2, …, R_n безрисковые вложения войдут в оптимальный портфель при условии

$$m_p \; < \; \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - r_0}{\sigma_i^2}} \; ;$$

если же выполняется

$$m_p \; = \; \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i - r_0)}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i - r_0}{\sigma_i^2}} \, ,$$

то в портфеле будет присутствовать только рисковая часть $\left(\theta_0^* = 0\right)$.

В случае $m_p = r_0$ в портфеле будет присутствовать только безрисковая часть:

$$\theta_0^* = 1, \quad \sigma_p^* = 0.$$

Рекомендуется проверить эти выводы самостоятельно проведенными расчетами.

Премия за риск.

Превышение средней эффективности ценной бумаги над эффективностью безрискового вклада называется *премией за риск*.

Можно показать, что премия за риск определенной ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель, пропорциональна премии за риск портфеля в целом:

$$m_j - r_0 \; = \; \beta_j^* \left(m_p - r_0\right), \quad j = 1, 2, \; \ldots, \; n \, , \tag{6.18}$$

где

$$\beta_j^* \; = \; \frac{\operatorname{cov}\left(R_j, R_p^*\right)}{\left(\sigma_p^*\right)^2} \, , \quad j = 1, 2, \; \ldots, \; n \, .$$

6.2.3 Равновесие на рынке ценных бумаг

Поведение большого числа инвесторов на рынке ценных бумаг аналогично поведению потребителей на конкурентном рынке, который описывается моделью Вальраса (см. раздел 5.3.2). Введем обозначения:

k_i^0 – начальный капитал i-го инвестора (включает вложения в безрисковые и рисковые ценные бумаги);

b_i^0 – безрисковый вклад i-го инвестора;

θ_{ij}^0 – доля i-го инвестора в общей стоимости рисковых ценных бумаг j-го вида;

W_j^0 – общая стоимость рисковых ценных бумаг j-го вида.

С учетом этих обозначений

$$k_i^0 = b_i^0 + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^0 \cdot W_j^0, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Моделирование поведения инвесторов основывается на следующих основных предположениях:

- Инвесторы одинаково информированы об эффективности вложений в различные виды ценных бумаг.
- Каждый инвестор стремится приобрести оптимальный портфель рисковых ценных бумаг, а долю безрисковой части вложений определяет путем максимизации среднего значения функции полезности

$$u_i(kR) = kR - A_i(kR - km_R)^2, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad m_R = M(R).$$

Задача максимизации имеет вид

$$M(u_i(kR)) = km_R - A_i k^2 \sigma_R^2 \quad \to \quad \max, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Коэффициенты $A_i > 0$ характеризуют склонность инвесторов к риску (чем меньше A_i, тем больше склонность к риску).

Из этих предположений следует, что все инвесторы будут стремиться приобрести одинаковые по структуре портфели рисковых ценных бумаг, и, следовательно, эффективности рисковой части у всех инвесторов будут одинаковы. Обозначим это значение эффективности R^*.

Предположим, что i-й инвестор вложит долю θ_{i0} своего первоначального капитала в безрисковые бумаги. Тогда в конце рассматриваемого промежутка времени его капитал станет равным

$$k_i^1 = \theta_{i0} \cdot k_i^0 \cdot (1 + r_0) + (1 - \theta_{i0}) \cdot k_i^0 (1 + R*).$$

Средняя полезность этого капитала равна

$$g_i(\theta_{i0}) = M\left(u_i\left(k_i^0 R\right)\right) =$$

$$= \theta_{i0} \cdot k_i^0 \cdot r_0 + (1 - \theta_{i0}) \cdot k_i^0 \cdot m* - A_i (1 - \theta_{i0})^2 \cdot \left(k_i^0\right)^2 (\sigma*)^2 ,$$

где

$$m* = M(R*), \quad (\sigma*)^2 = D(R*).$$

Учитывая, что

$$\frac{dg_i}{d\theta_{i0}} = k_i^0 \cdot (r_0 - m*) + 2A_i (1 - \theta_{i0}) \cdot \left(k_i^0\right)^2 (\sigma*)^2 ,$$

максимум средней полезности достигается при

$$k_i^0 \cdot (r_0 - m*) + 2A_i (1 - \theta_{i0}) \cdot \left(k_i^0\right)^2 (\sigma*)^2 = 0 ,$$

т. е. при

$$\theta_{i0}^* = 1 - \frac{m* - r_0}{2A_i \cdot k_i^0 \cdot (\sigma*)^2} .$$

Поэтому все инвесторы вложат в рисковые ценные бумаги капитал в объеме

$$\sum_{i=1}^{I} (1 - \theta_{i0}^*) \cdot k_i^0 = \frac{m* - r_0}{2(\sigma*)^2} \cdot \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i} .$$

Равновесное состояние рынка достигается при равенстве спроса и предложения:

$$\frac{m* - r_0}{2(\sigma*)^2} \cdot \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i} = W^0 , \qquad (6.19)$$

где W^0 – суммарная исходная стоимость рисковых бумаг.

Обозначим:

W_j^0, W_j^1 – суммарные исходная и будущая стоимости ценных бумаг *j*-го вида,

$W^1 = \sum_{j=1}^{n} W_j^1$ – суммарная будущая стоимость рисковых ценных бумаг.

Из определения эффективностей финансовых операций

$$R_j = \frac{W_j^1 - W_j^0}{W_j^0}, \quad R = \frac{W^1 - W^0}{W^0}.$$

Тогда, учитывая что W_j^0, W^0 – неслучайные величины,

$$m = M(R) = \frac{M(W^1) - W^0}{W^0}, \quad m_j = M(R_j) = \frac{M(W_j^1)}{W_j^0} - 1,$$

$$\sigma^2 = D(R) = \frac{1}{(W^0)^2} \cdot D(W^1), \tag{6.20}$$

$$\beta_j = \frac{\operatorname{cov}(R_j, R)}{\sigma^2} = \frac{W^0 \cdot \operatorname{cov}(W_j^1, W^1)}{W_j^0 \cdot D(W^1)}.$$

Подставим выражения для m_j, m_p и β_j в (6.18):

$$\frac{M(W_j^1)}{W_j^0} - 1 - r_0 = \frac{W^0 \cdot \operatorname{cov}(W_j^1, W^1)}{W_j^0 \cdot D(W^1)} \left(\frac{M(W^1) - W^0}{W^0} - r_0 \right), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

и разрешим полученные уравнения относительно W_j^0:

$$W_j^0 = \frac{1}{1 + r_0} \cdot \left(M(W_j^1) - \frac{\operatorname{cov}(W_j^1, W^1)}{D(W^1)} \left(M(W^1) - W^0 (1 + r_0) \right) \right), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично, подставляя m и σ^2 из (6.20) в уравнение баланса (6.19), получим:

$$\frac{M(W^1) - W^0(1 + r_0)}{\frac{2}{W^0} \cdot D(W^1)} \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i} = W^0,$$

откуда

$$W^0 = \frac{1}{1 + r_0} \left(M(W^1) - \frac{2D(W^1)}{\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i}} \right).$$

Окончательное выражение для равновесного значения общей стоимости бумаг j-го вида имеет вид:

$$W_j^0 = \frac{1}{1+r_0} \cdot \left(M\left(W_j^1\right) - \frac{2\operatorname{cov}\left(W_j^1, W^1\right)}{\sum\limits_{i=1}^{I} \frac{1}{A_i}} \right), \qquad j = 1, 2, \ \ldots, \ n.$$

При отсутствии риска

$$W_j^0 = \frac{W_j^1}{1+r_0}, \qquad j = 1, 2, \ \ldots, \ n.$$

Замечание. Рассмотренная модель поведения инвесторов опирается на предположение классической теории эффективного рынка об однородности поведения его участников. Современная теория финансового рынка строится на основе предположения о *фрактальности* (неоднородности) поведения инвесторов: более активным поведением отличаются владельцы «коротких денег», более пассивным – владельцы «длинных денег». Это приводит к изменению законов распределения эффективностей рискованных финансовых операций, что должно быть отражено в математических соотношениях модели. Подробнее об этом можно прочитать, например, в [1].

Задания для самостоятельного выполнения

***Задание* 1.**

С помощью модели Кейнса рыночной экономики выполнить исследование ситуации на рынке труда при общем равновесии на рынках денег и товаров при условии максимизации прибыли относительно капитала. Известно, что

- предложение товаров Y может быть описано ПФ Кобба-Дугласа

  $F(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$;
- спрос на потребительские товары задаётся линейной функцией

  $C(Y) = a + b \cdot Y$;
- спрос на инвестиционные товары задаётся линейной функцией от нормы процента r

  $I(r) = d - f \cdot r$;
- спрос на облигации задаётся линейной функцией от r

$$Lq(r) = h - j \cdot r.$$

Известны также предложение денег M^S, цена продукта p и коэффициент пропорциональности денежного дохода k. В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Записать математическое условие общего равновесия на рынках денег и товаров.
2. Используя полученное соотношение, найти равновесные значения нормы процента и предложения товаров.
3. Записать необходимое условие максимума прибыли относительно капитала. Показать, что в рассматриваемой ситуации это условие будет и достаточным.
4. Используя полученные соотношения, найти значение спроса на рабочую силу.
5. Определить максимальную ставку реальной заработной платы, которую могут получать наемные работники в рассматриваемой ситуации. Найти максимальную номинальную заработную плату при заданном уровне цен.
6. Для заданных значений параметров: A = 2,24, α = 0.52, a = 127300, b = 0.31, d = 84500, f = 229500, h = 5150, j = 19820, M^S = 11000, p = 0.3 и k = 0.24, выполнить все расчеты, указанные в п. 2 – 5. Найти равновесные значения нормы процента и предложения товаров, значение спроса на рабочую силу, максимальную ставку реальной заработной платы и номинальную заработную плату при заданном уровне цен.

***Задание* 2**.

Инвестор может вложить свой капитал, составляющий K тыс. ден. ед., в акции A, B, C. Процентные ставки по акциям являются независимыми случайными величинами R_A, R_B, R_C с математическими ожиданиями, равными $M(R_A)$, $M(R_B)$, $M(R_C)$ и стандартными отклонениями, равными σ_A, σ_B, σ_C. Инвестор желает получить за первый год в среднем $0{,}1 \cdot K$ ден. ед. дивидендов. Решить задачу оптимизации инвестиционного портфеля (цель – минимизировать дисперсию эффективности портфеля). В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Сформулировать математическую постановку задачи оптимизации портфеля ценных бумаг в виде задачи квадратичного программирования.
2. Решить полученную задачу квадратичного программирования и определить оптимальную структуру портфеля.
3. Найти дисперсию оптимального портфеля.
4. Для заданных значений параметров: K = 300, $M(R_A)$ = 8%, $M(R_B)$ = 10%, $M(R_C)$ = 12%, σ_A = 1%, σ_B = 2% и σ_C = 4%, произвести все расчеты, необходимые для выполнения заданий пп. 2 и 3. Найти оптимальную структуру портфеля и дисперсию оптимального портфеля.
5. Сравнить числовые характеристики эффективности оптимального портфеля с характеристиками эффективности портфелей, содержащих акции только одного вида. Сделать выводы и дать окончательные рекомендации по формированию портфеля ценных бумаг в рассматриваемых условиях.

***Задание* 3**.

Проанализировать задачу оптимизации инвестиционного портфеля в случае, когда инвестор, наряду с покупкой ценных бумаг, может делать и безрисковые вложения (значение эффективности детерминировано): сформулировать (в общем виде) модифицированную задачу квадратичного программирования, найти решение полученной задачи. Проанализировать условия присутствия в оптимальном портфеле безрисковой части.

***Задание* 4**.

Инвестор может вложить свой капитал, составляющий K тыс. ден. ед., в акции автомобильного концерна A и строительного предприятия B. С целью уменьшения риска накладывается условие: акций A должно быть приобретено, по крайней мере, в 2 раза больше, чем акций B, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед. Дивиденды по акциям A составляют r_A процентов в год, по акциям B – r_B процентов. Решить задачу оптимизации прибыли за первый год. В ходе проведения анализа выполнить следующее.

1. Сформулировать математическую постановку задачи максимизации прибыли первого года в виде задачи линейного программирования.
2. Для заданных значений параметров: $K = 300$, $r_A = 8\%$ и $r_B = 10\%$, решить полученную задачу ЛП; определить оптимальную структуру инвестиционного портфеля и максимально возможную прибыль.

Задачи.

1. Заемщик заключил договор на сумму 100 тыс. д.е. Процентная ставка – 3%, ежегодный возврат кредита и процентов по кредиту – 6 тыс. д. е. Через сколько лет заемщик возвратит 40% суммы кредита?
2. Заключен кредитный договор на 200 тыс. д. е. В конце каждого года клиент должен выплачивать постоянную сумму E (возврат части кредита и процентов по нему). Процентная ставка составляет 2,5%; к концу пятого года клиент должен возвратить 40% суммы кредита. Найти E.

Заключение

Одним из современных методов исследования экономических процессов является математическое моделирование этих процессов с последующим проведением вычислительных экспериментов. Актуальность развития этого направления обусловлена необратимостью многих таких процессов, а также их сложностью, которая проявляется, прежде всего, в нелинейности и многообразии взаимосвязей между переменными.

Важно отметить, что развитие экономико-математического моделирования связано с применением фундаментальных результатов, полученных при моделировании процессов, происходящих в физических, технических, биологических системах. Распространение понимания значения математических аналогий позволило перенести методы математического моделирования из области естествознания в область исследования экономических процессов и систем. В рамках данного пособия это наиболее ярко иллюстрирует глава 3, где показано применение методов теории автоматического управления к моделированию динамических процессов макроэкономики.

Исследования моделей подобного типа с одной стороны, имеют важное мировоззренческое значение, поскольку часто приводят к новым, иногда даже парадоксальным выводам об изучаемом явлении. С другой стороны, анализ таких моделей важен с практической точки зрения, т. к. служит методологической основой сложных прогнозных моделей экономических процессов.

Задания для контроля

Тестовые задания для самоконтроля

1. Одно из условий, которому должна удовлетворять неоклассическая производственная функция $F(K, L)$ – это

   1) $F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = 0$

   2) $\dfrac{\partial F}{\partial K} < 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} < 0$

   3) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} > 0, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} > 0$

   4) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$

2. Пусть рассматривается производственная функция $F(K, L)$. Предельная фондоотдача – это величина

   1) $\dfrac{F(K, L)}{K}$

   2) $\dfrac{\partial F}{\partial K}$

   3) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2}$

   4) $\dfrac{\partial \ln F}{\partial \ln K}$

3. Пусть рассматривается производственная функция $F(K, L)$. Эластичность выпуска по труду – это величина

   1) $\dfrac{F(K, L)}{L}$

   2) $\dfrac{\partial F}{\partial L}$

   3) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2}$

4) $\dfrac{\partial \ln F}{\partial \ln L}$

4. Имеется баланс двух взаимосвязанных отраслей (машиностроение и сельское хозяйство). Известны матрица межотраслевых потоков $X = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$ и вектор валового выпуска $\overline{x} = \begin{pmatrix} 110 \\ 130 \end{pmatrix}$. Матрица прямых затрат (технологическая матрица) имеет вид:

   1) $\begin{pmatrix} \dfrac{5}{110} & \dfrac{15}{130} \\ \dfrac{10}{110} & \dfrac{15}{130} \end{pmatrix}$

   2) $\begin{pmatrix} \dfrac{5}{110} & \dfrac{15}{110} \\ \dfrac{10}{130} & \dfrac{15}{130} \end{pmatrix}$

   3) $\begin{pmatrix} 5 \cdot 110 & 15 \cdot 110 \\ 10 \cdot 130 & 15 \cdot 130 \end{pmatrix}$

   4) $\begin{pmatrix} 5 \cdot 110 & 15 \cdot 130 \\ 10 \cdot 110 & 15 \cdot 130 \end{pmatrix}$

5. Известны точечные оценки параметров модели Самуэльсона-Хикса с дискретным временем: совокупный автономный спрос $\underline{C} + I = 40{,}39\ \%$; предельная склонность к потреблению c =0,61; коэффициент акселерации r = 0,57; а также начальные значения ВВП Y_0 = 100 и Y_1 = 93,74 (в % к Y_0). Прогнозируемое значение ВВП Y_2, определяемое на основе уравнения Хикса, в % к Y_0 равно

   1) 100,83
   2) 93,42
   3) 94,00
   4) 82,48

6. Динамическая модель межотраслевого баланса

   1) отражает процесс капитального строительства (наращивания ОПФ)

2) предполагает постоянство валовых инвестиций
3) предполагает постоянство валового выпуска
4) предполагает постоянство ОПФ

7. Свойство функции полезности потребителя $u(\overline{x})$, выражаемое условиями $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, имеет следующий экономический смысл:
1) при увеличении потребления блага полезность возрастает
2) с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется
3) небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность
4) функция полезности, если она существует, определяется не однозначно

8. Функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1^{2/3} + 0{,}8 \cdot x_2^{1/3}$. Тогда кривые безразличия определяются уравнениями
1) $x_1^{1/3} + 0{,}8 \cdot x_2^{2/3} = 0$
2) $\dfrac{2}{3} x_1^{-1/3} + \dfrac{4}{15} \cdot x_2^{-2/3} = C = const$
3) $\dfrac{1}{3} x_1^{-2/3} + 0{,}8 \cdot x_2^{-1/3} = 0$
4) $x_1^{2/3} + 0{,}8 \cdot x_2^{1/3} = C = const$

9. Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – столбец объемов товаров, приобретаемых потребителем за определенный срок, $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – строка цен на товары. Товары i и l называются взаимодополняемыми, если выполняется условие
1) $\left(\dfrac{\partial x_l^*}{\partial p_i} \right)_{comp} < 0$
2) $\left(\dfrac{\partial x_l^*}{\partial p_i} \right)_{comp} > 0$

3) $\left(\dfrac{\partial x_l^*}{\partial p_i}\right)_{comp} \le 0$

4) $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_l} = \left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_l}\right)_{comp} - \dfrac{\partial x_i^*}{\partial M} \cdot x_l^*$

10. Пусть выпуск однопродуктовой фирмы характеризуется ПФ $X = F(K, L)$. Стоимость аренды единицы фондов составляет $w_K = 2{,}5$ ден. ед./ед. ф.; ставка заработной платы $w_L = 5$ ден. ед./чел. Состояние фирмы будет удовлетворять условиям оптимальности выпуска, если величина предельных продуктов составляет

    1) $\dfrac{\partial F}{\partial K} = 16, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} = 10$

    2) $\dfrac{\partial F}{\partial K} = 8, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} = 16$

    3) $\dfrac{\partial F}{\partial K} = 16, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} = 8$

    4) $\dfrac{\partial F}{\partial K} = 10, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} = 5$

11. Пусть выпуск однопродуктовой фирмы характеризуется ПФ $X = F(K, L)$. Известны величины предельных продуктов в точке максимума выпуска: $\dfrac{\partial F}{\partial K} = 4, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} = 8$. Количество единиц фондов, необходимых для замены одного работающего, в этой точке составляет

    1) 4
    2) 8
    3) 1/2
    4) 2

12. Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – столбец возможных объемов затрат ресурсов, $\overline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ – строка цен на ресурсы. Ресурсы j-го и k-го видов называются взаимозаменяемыми, если

1) $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_k^*} > 0$

2) $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_k^*} < 0$

3) $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_j^*} < 0$, $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k^*} < 0$

4) $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_k^*} \le 0$

13. Паутинообразная модель реализует
    1) решение задачи максимизации прибыли однопродуктовой фирмы
    2) процесс поиска равновесной цены
    3) решение задачи оптимизации потребительского выбора
    4) решение задачи оптимизации затрат ресурсов на производство товаров
14. Рассматривается непрерывная модель Эванса с функцией совокупного спроса $\Phi(p) = 11 - 3p$ и функцией совокупного предложения $\Psi(p) = 3 + 2p$. В начальный момент времени цена на продукт составляла $p_0 = 3$ д. е. В соответствии с этой моделью,
    1) цена будет стремиться к своему равновесному значению, монотонно возрастая
    2) цена будет стремиться к своему равновесному значению, монотонно убывая
    3) изменение цены будет иметь характер затухающих колебаний
    4) равновесной цены не существует (процесс изменения цены будет расходящимся)
15. В классической модели рыночной экономики анализ рынка товаров основан на следующем положении: спрос на товары
    1) возрастает с ростом процентной ставки
    2) убывает с ростом процентной ставки

3) является функцией уровня занятости, соответствующего равновесию на рынке труда
4) определяется величиной денежной массы

16. Финансовый рынок – это рынок, на котором можно выделить следующие виды товаров:
    1) деньги, ценные бумаги
    2) ценные бумаги
    3) облигации, акции, фьючерсы
    4) деньги, банковские кредиты, ценные бумаги

17. Сумма, помещенная в банк, составляет 100 тыс. ден.ед. Ежемесячно на эту сумму выплачивается 1,2%. При расчете по схеме сложных процентов сумма, накопленная через 5 месяцев (в тыс. ден. ед.), составит
    1) $100 \cdot (1 + 0{,}012 \cdot 5)$
    2) $100 \cdot (1 + 0{,}12)^5$
    3) $100 \cdot (1 + 0{,}012)^5$
    4) $100 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 5)$

18. Рассматривается простейшая финансовая операция – предоставление в долг суммы $S(0)$ с условием, что через промежуток времени T будет возвращена сумма $S(T)$. Величина r, которая находится из соотношения $(1 + r)^T = \dfrac{S(T)}{S(0)}$ – это
    1) дисконт
    2) дисконт-фактор
    3) эффективная ставка
    4) дисперсия эффективности операции

19. Рассматривается задача оптимизации портфеля ценных бумаг: имеются n видов ценных бумаг, которые характеризуются эффективностями R_1, R_2, …, R_n (случайные величины с математическими ожиданиями m_1, m_2, …, m_n и ковариационной матрицей B), θ_i – доли вложений в различные

бумаги. Неопределенность эффективности портфеля характеризуется величиной

1) $R_p = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot R_i$

2) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta_i \cdot \theta_j \cdot b_{ij}$

3) $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \theta_i$

4) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta_i \cdot \theta_j \cdot m_i \cdot m_j$

20. Инвестор может составить портфель из трех видов ценных бумаг, эффективности которых R_1, R_2, R_3 являются некоррелированными случайными величинами, $M(R_1) = 15$, $\sigma_1 = 4$; $M(R_2) = 12$, $\sigma_2 = 3$; $M(R_3) = 9$, $\sigma_3 = 1$, θ_i – доли вложений в различные бумаги. Значение средней эффективности портфеля выбрано равным $m_p = 10$. В задаче минимизации неопределенности эффективности портфеля целевая функция будет иметь вид:

1) $15\theta_1 + 12\theta_2 + 9\theta_3$

2) $16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2$

3) $15\theta_1 + 12\theta_2 + 9\theta_3 - 10$

4) $15\theta_1^2 + 12\theta_2^2 + 9\theta_3^2$

Ключи к тестовым заданиям

Номер задания	Номер ответа	Номер задания	Номер ответа
1	4	11	4
2	2	12	1
3	4	13	2
4	1	14	2
5	3	15	2
6	1	16	4
7	3	17	3
8	4	18	3
9	1	19	2

10	2	20	2

Контрольные вопросы для подготовки к зачету и экзамену

1. Экономика как система. Особенности экономики как объекта моделирования, основные методы исследования экономики.
2. Структура экономики как объекта математического моделирования. Схема взаимодействия основных производственных факторов. Макро- и микро-экономические модели.
3. Производственные функции (ПФ). Неоклассические ПФ. Основные числовые характеристики, определяемые по известной ПФ: средняя и предельная производительность по каждому ресурсу, эластичность по каждому ресурсу, эластичность производства.
4. Мультипликативная производственная функция (МПФ). Основные свойства МПФ. Производственная функция Кобба-Дугласа.
5. Изокванты и изоклинали. Предельные нормы замены ресурсов. Изокванты, предельные нормы замены ресурсов и изоклинали для мультипликативной производственной функции.
6. Оценка масштаба и эффективности производства на основе производственных функций.
7. Основная цель балансового анализа. Статическая модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева: базовые предположения, соотношения баланса, матричная форма соотношений баланса. Сущность метода Леонтьева.
8. Продуктивность модели Леонтьева. Условия продуктивности. Вектор полных затрат, мультипликатор Леонтьева.
9. Добавленная стоимость, норма добавленной стоимости. Модель равновесных цен.
10. Баланс трудовых ресурсов. Модель межотраслевого баланса, расширенная балансом труда. Таблицы межотраслевого баланса.
11. Динамическая модель Кейнса. Определение ВВП в модели Кейнса.
12. Модель Самуэльсона-Хикса. Определение ВВП в модели

Самуэльсона-Хикса в случае $\frac{(r+c)^2}{4} - r > 0$.

13. Модель Самуэльсона-Хикса. Определение ВВП в модели Самуэльсона-Хикса в случае $\frac{(r+c)^2}{4} - r < 0$.
14. Динамическая модель межотраслевого баланса В. Леонтьева (открытый динамический баланс с дискретным временем). Полная структурная форма динамического межотраслевого баланса.
15. Траектория производственного сектора экономики. Сбалансированная траектория, темп роста сбалансированной траектории. Существование сбалансированной траектории в модели замкнутого динамического баланса.
16. Магистральные модели. Формализация понятий «производство» и «производственный процесс». Модель Гейла. Технологическое множество статической модели Леонтьева как модель Гейла.
17. Допустимая траектория в модели Гейла на конечном и бесконечном интервале времени. Траектория сбалансированного роста. Магистраль. Неймановский луч. Темп роста технологического процесса, его основное свойство.
18. Модель экономики фон Неймана. Неразложимая технология в модели фон Неймана. Достаточное условие неразложимости. Теорема фон Неймана. Модель расширяющейся экономики фон Неймана.
19. Эффективные траектории производственного сектора, u-оптимальные траектории. Теорема о магистрали, ее интерпретация.
20. Применение динамической модели Леонтьева в рамках магистральной модели накопления: магистральная модель накопления, методика формирования магистрали в этой модели; построение u-оптимальной траектории.
21. .Динамические элементы в экономических системах: мультипликатор, акселератор, инерционное звено, колебательное звено. Показать на

примерах.

22. Линейный динамический элемент n-го порядка. Устойчивость линейных динамических звеньев. Устойчивость экономики в модели Кейнса, в модели Самуэльсона-Хикса (обосновать).
23. Модель Солоу: базовые предположения, уравнения модели в абсолютных и относительных показателях.
24. Стационарная траектория развития в модели Солоу. Характеристика переходного режима в модели Солоу.
25. Исследование переходного процесса модели Солоу в случае производственной функции Кобба-Дугласа. Золотое правило накопления.
26. Модели поведения потребителей: предпочтения потребителя и его функция полезности, теорема Дебре, основные свойства функции полезности.
27. Модели поведения потребителей: предельная полезность товара, поверхности безразличия, нормы замены товаров. Экономическая интерпретация.
28. Формализация задачи оптимизации потребительского выбора. Сведение ее к задаче безусловной оптимизации. Функция спроса потребителя.
29. Исследование функции спроса: изменение спроса при изменении цен.
30. Исследование функции спроса: изменение спроса при увеличении цены с компенсацией.
31. Исследование функции спроса: изменение спроса при изменении дохода.
32. Ценные, малоценные, взаимозаменяемые и взаимодополняемые товары. Уравнение Слуцкого, его экономический смысл; следствие о существовании взаимозаменяемых товаров. Свойство валовой заменимости функции спроса.
33. Модель фирмы: основные предположения модели, постановка задачи

максимизации прибыли. Применение условий Куна-Таккера для построения решения этой задачи.

34. Модель фирмы: постановка задачи максимизации выпуска при ограничении на объем издержек. Применение условий Куна-Таккера для построения решения этой задачи. Взаимосвязь задач максимизации прибыли и максимизации выпуска при ограничении на объем издержек.
35. Модель фирмы: изокосты, их экономический смысл. Функции спроса и предложения, поведение производителя при заданных ценах на продукцию и ресурсы.
36. Модель фирмы: реакция производителя на изменение цены выпуска.
37. Модель фирмы: реакция производителя на изменение цен ресурсов.
38. Основное матричное уравнение теории фирмы, его следствия для неоклассической производственной функции. Взаимозаменяемые и взаимодополняемые ресурсы.
39. Поведение фирм на конкурентных рынках: базовые предположения модели, формализация задачи максимизации прибыли каждой из фирм. Методика определения стратегии фирм.
40. Постановка задачи конкуренции при линейных функциях издержек и цены на продукцию. Равновесие Курно: основное предположение, алгоритм Курно, точка равновесия, прибыли каждой из фирм, итоговая цена на продукцию.
41. Постановка задачи конкуренции при линейных функциях издержек и цены на продукцию. Равновесие и неравновесие Стакельберга: основные предположения, стратегии фирм, прибыли каждой из фирм, итоговая цена на продукцию.
42. Постановка задачи максимизации прибыли в случае образования монополии. Оптимальное решение этой задачи: прибыли каждой из фирм, итоговая цена на продукцию.
43. Паутинообразная модель: базовые предположения, процедура поиска

равновесной цены.

44. Непрерывная модель Эванса: базовые предположения, определение равновесной цены.
45. Дискретная модель Эванса: базовые предположения, определение равновесной цены.
46. Модель Вальраса: базовые предположения, закон Вальраса в широком и узком смысле.
47. Ситуация конкурентного равновесия в модели Вальраса. Условия существования конкурентного равновесия.
48. Классическая модель рыночной экономики: рынок рабочей силы.
49. Классическая модель рыночной экономики: рынок денег, рынок товаров.
50. Модель Кейнса: основные отличия от классической модели.
51. Модель финансового рынка: структура финансового рынка, финансовые операции, финансовые риски.
52. Постановка задачи оптимизации портфеля ценных бумаг, формализация задачи, оптимальная структура портфеля.
53. Математические модели финансового рынка: равновесие на рынке ценных бумаг.

Литература

Основная литература.

1. Колемаев В.А. Математическая экономика: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 399 с.
2. Охорзин В.А. Математическая экономика: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная информатика (по областям)» / В.А. Охорзин – Москва: Абрис, 2012. – 263 с.
3. Волгина О.А. Математическое моделирование экономических процессов и систем: учеб. пособие для студентов / авт.-сост. О.А. Волгина [и др.] – Москва: КноРус, 2012. – 200 с.

Дополнительная литература.

4. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 224 с.
5. Экономико-математическое моделирование: учебник для студентов вузов / Под. общ. редакцией И.Н. Дрогобыцкого. – М.: Издательство «Экзамен», 2004. – 800 с.
6. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: учебник в 2-х частях. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 224 с.
7. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике: учебник / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра; в 2-х частях. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 376 с.
8. Замков О.О, Толстопятенко А.В., Черемных Ю.В. Математические методы в экономике: учебник. – М.: Дело и сервис, 2009. – 380 с.
9. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. – М.: Политиздат, 1990. – 415 с.
10. Математическая экономика на персональном компьютере. Пер. с яп. /М. Кубонива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ. Под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

11. Самуэльсон П.Э., Нордхаус В.Д. Экономика. – М.: Вильямс, 2009. – 1360 с.
12. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2007. – 312 с.
13. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-Пресс, 2002. – 553 с.
14. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учебное пособие для вузов / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 455 с.
15. Лебедев В.В. Математические модели социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997. – 224 с.
16. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике: учебное пособие / Л.Э. Хазанова. – М.: БЕК, 1998. – 399 с.
17. Просветов Г.И. Математические методы и модели в экономике. Задачи и решения. – М.: Альфа-Пресс, 2008. – 344 с.

Приложение I. Линейные конечно-разностные уравнения

Пусть дана дискретная функция $y(t)$, аргумент которой принимает значения $t = kT,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ Величина

$$\Delta y(t) = y(t+T) - y(t)$$

называется *конечной разностью первого порядка*.

Конечные разности n-го порядка определяются рекуррентно:

$$\Delta^0 y(t) = y(t),$$
$$\Delta^n y(t) = \Delta^{n-1} y(t+T) - \Delta^{n-1} y(t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Можно показать, что конечные разности n-го порядка могут быть представлены в виде

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k y(t+kT), \quad C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \qquad (I.1)$$

Уравнение

$$c_0 \Delta^n y(t) + c_1 \Delta^{n-1} y(t) + \ldots + c_n y(t) = \varphi(t), \quad c_0 \neq 0, \qquad (I.2)$$

где $y(t)$ – неизвестная дискретная функция,

$c_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$ – числовые коэффициенты,

называется *линейным конечно-разностным уравнением n-го порядка*.

С помощью соотношений (I.1) уравнение (I.2) может быть преобразовано к виду

$$a_0 y(t+nT) + a_1 y(t+(n-1)T) + \ldots + a_n y(t) = \varphi(t). \qquad (I.3)$$

При $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$ уравнение (I.3) также называют конечно-разностным уравнением n-го порядка.

Уравнение

$$a_0 y(t+nT) + a_1 y(t+(n-1)T) + \ldots + a_n y(t) = 0 \qquad (I.4)$$

называется *линейным однородным конечно-разностным уравнением*, соответствующим уравнению (I.3).

Общее решение неоднородного уравнения (I.3) имеет вид

$$y(t) = y_{\text{ч}}(t) + y_{\text{о}}(t), \qquad (I.5)$$

где $y_{\text{ч}}(t)$ – частное решение уравнения (I.3),

$y_о(t)$ – общее решение однородного уравнения (I.4).

Для нахождения общего решения однородного уравнения (I.4) $y_о(t)$, как и в случае линейных дифференциальных уравнений, достаточно построить систему из n линейно независимых частных решений этого уравнения. Доказано, что частные решения уравнения (I.4) могут быть найдены в виде $y(t) = \lambda^t$. Подставляя это выражение в (I.4), получим уравнение

$$\left(a_0\lambda^{nT} + a_1\lambda^{(n-1)T} + \ldots + a_n\right)\lambda^t = 0,$$

откуда

$$a_0\lambda^{nT} + a_1\lambda^{(n-1)T} + \ldots + a_n = 0.$$

Обозначим $\lambda^T = z$, тогда

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad \text{(I.6)}$$

Уравнение (I.6) называется *характеристическим уравнением* уравнения (I.4). Обозначим z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ – различные корни характеристического уравнения (I.6). Легко проверить, что функции

$$y_i = \lambda_i^t = z_i^{\frac{t}{T}}$$

являются частными решениями уравнения (I.4).

Для получения общего решения уравнения (I.4) $y_о(t)$ можно руководствоваться следующими правилами.

- Если все корни уравнения (I.6) действительны и различны, то

$$y_о(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^{t/T}, \qquad \text{(I.7)}$$

  где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

- Если среди корней уравнения (I.6) имеется корень z_l кратности k_l, то ему в сумме (I.7) соответствует слагаемое

$$\left(C_1^l + C_2^l \frac{t}{T} + \ldots + C_{k_l}^l \left(\frac{t}{T}\right)^{k_l - 1}\right) z_l^{t/T},$$

  где $C_1^l, C_2^l, \ldots, C_{k_l}^l$ – произвольные постоянные.

- Если имеются простые комплексно-сопряженные корни $z_{k,k+1} = \alpha \pm \beta \cdot i$,

(i – мнимая единица), то сумму соответствующих им в (I.7) двух слагаемых можно заменить выражением

$$\rho^{t/T}\left(A\cos\frac{t}{T}\varphi + B\sin\frac{t}{T}\varphi\right), \quad \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \; \varphi = arctg\frac{\beta}{\alpha},$$

где A и B – произвольные постоянные.

Для нахождения частного решения уравнения (I.3) $y_ч(t)$, как и в случае линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, может быть использован метод неопределенных коэффициентов.

Если, кроме самого уравнения (I.3), заданы начальные условия, которым должно удовлетворять решение этого уравнения, то для произвольных постоянных в формуле общего решения могут быть определены конкретные значения, и тем, самым, получено частное решение уравнения (I.3).

<u>Пример</u>. Найдем решение конечно-разностного уравнения

$$y(t + 2T) + y(t + T) + 0{,}25y(t) = 1$$

при нулевых начальных условиях: $y(0) = y(T) = 0$.

Данное уравнение является неоднородным. Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид

$$y(t + 2T) + y(t + T) + 0{,}25y(t) = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$z^2 + z + 0{,}25 = 0.$$

Это уравнение имеет двукратный корень $z = -0.5$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_о(t) = \left(C_1 + C_2\frac{t}{T}\right)(-0{,}5)^{\frac{t}{T}}.$$

Поскольку правая часть исходного неоднородного уравнения представляет собой константу, частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$y_ч(t) = a.$$

Подставим это выражение в исходное уравнение и найдем a.

$$a + a + 0{,}25a = 1, \text{ и } a =$$

Тогда общее решение исходного уравнения, в соответствии с (I.5), имеет вид

$$y(t) = y_{\text{ч}}(t) + y_{\text{о}}(t) = \frac{4}{9} + \left(C_1 + C_2\frac{t}{T}\right)(-0{,}5)^{t/T}.$$

Используя данные в задаче начальные условия, составим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{4}{9} + C_1 = 0, \\ y(T) = \dfrac{4}{9} - 0{,}5(C_1 + C_2) = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -\dfrac{4}{9}$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$, и искомое частное решение имеет вид

$$y(t) = \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{3}\frac{t}{T} - \frac{4}{9}\right)(-0{,}5)^{t/T}.$$

Приложение II. Передаточные функции линейных непрерывных систем управления

Передаточная функция системы управления.

В общем случае непрерывная система управления с одним входом x и одним выходом y после линеаризации может быть описана уравнением

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \ldots + b_m x. \qquad \text{(II.1)}$$

Введем обозначение для операции дифференцирования:

$$p \equiv \frac{d}{dt}, \quad p^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}, \quad \ldots, \quad p^i \equiv \frac{d^i}{dt^i}, \quad \ldots$$

p – оператор дифференцирования, который каждой функции $z(t)$ сопоставляет ее производную $\dfrac{dz}{dt}$. Тогда уравнение (II.1) может быть записано в *операторной форме*:

$$a_0 p^n y + a_1 p^{n-1} y + \ldots + a_n y = b_0 p^m x + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m x \qquad \text{(II.2)}$$

или

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) y = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m\right) x.$$

Введем обозначения:

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n, \quad P(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m,$$

с учетом которых уравнение (II.2) примет вид

$$Q(p) y = P(p) x.$$

Дифференциальный оператор $Q(p)$ при выходной переменной называется *собственным оператором системы*, а дифференциальный оператор $P(p)$ при входной переменной – оператором воздействия.

Передаточной функцией системы (*звена*) *в операторной форме* называется отношение оператора воздействия к собственному оператору системы:

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Это оператор. Его нельзя рассматривать как обычную дробь. Степень многочлена $Q(p)$ называется *порядком* передаточной функции и соответствующей системы (звена).

Уравнение СУ (звена), записанное с помощью передаточной функции, имеет вид:

$$y = W(p)x = \frac{P(p)}{Q(p)}x. \tag{II.3}$$

Уравнение (II.3), также как и (II.2), называется операторным уравнением системы (II.1).

Для примера построим передаточные функции линейных динамических звеньев, рассмотренных в разделе 3.2.1.

- Мультипликатор.

Мультипликатор определяется уравнением

$$a_0 y = b_0 x,$$

или, $y = \alpha \cdot x$, $\alpha = \dfrac{b_0}{a_0}$ – коэффициент усиления.

Уравнение не содержит производных, поэтому в данном случае операторное уравнение совпадает с исходным уравнением.

$$Q(p) = a_0, \; P(p) = b_0,$$

и передаточная функция имеет вид $W(p) = \dfrac{b_0}{a_0} = \alpha$.

Уравнение звена, записанное с помощью передаточной функции:

$$y = \alpha \cdot x.$$

- Акселератор.

Акселератор определяется уравнением

$$a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt},$$

или $y = r \cdot \dfrac{dx}{dt}$, $r = \dfrac{b_1}{a_0}$ – коэффициент усиления.

Операторное уравнение имеет вид:

$$a_0 y = b_1 \cdot px.$$

Собственный оператор звена $Q(p) = a_0$, оператор воздействия $P(p) = b_0$, передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_1}{a_0} p = rp.$$

Уравнение звена, записанное с помощью передаточной функции, имеет вид:

$$y = r \cdot px.$$

- Инерционное звено.

Инерционное звено определяется уравнением

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t),$$

или, в стандартной форме,

$$T \frac{dy}{dt} + y = \tilde{x}(t),$$

где $T = \dfrac{a_1}{a_0}$, $\quad \tilde{x}(t) = \dfrac{x(t)}{a_0}$.

Операторное уравнение имеет вид:

$$(Tp + 1)y = \tilde{x}.$$

Собственный оператор звена $Q(p) = Tp+1$, оператор воздействия $P(p) = 1$, передаточная функция

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

Уравнение звена, записанное с помощью передаточной функции, имеет вид:

$$y = \frac{1}{Tp + 1} \tilde{x}.$$

- Колебательное звено.

Колебательное звено определяется уравнением

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}$$

при условии $a_1^2 - 4a_0 \cdot a_2 < 0$ (дискриминант характеристического уравнения отрицателен).

В качестве конкретного примера рассмотрим непрерывную модель Самуэльсона-Хикса, приведенную к стандартной форме (3.28):

$$\frac{1}{1-c} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C} + I}{1-c}.$$

Операторное уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{1}{1-c} p^2 + \frac{1-r}{1-c} p + 1\right) y = 1.$$

Собственный оператор звена $Q(p) = \frac{1}{1-c} p^2 + \frac{1-r}{1-c} p + 1,$ оператор воздействия $P(p) = 1,$ передаточная функция

$$W(p) = \frac{1}{\frac{1}{1-c} p^2 + \frac{1-r}{1-c} p + 1} = \frac{1-c}{p^2 + (1-r)p + 1 - c}.$$

Уравнение звена, записанное с помощью передаточной функции, имеет вид:

$$y = \frac{1-c}{p^2 + (1-r)p + 1 - c} x.$$

Передаточные функции соединения звеньев.

Структурной схемой системы управления называется графическое представление ее математической модели в виде соединений звеньев, представляемых прямоугольниками или кругами (кругами изображаются сумматоры), с указанием входных и выходных переменных. Обычно внутри прямоугольника, изображающего звено, помещается обозначение оператора звена (передаточной функции).

Изображение сумматоров в случае положительной и отрицательной обратной связи показано на рис. II.1.

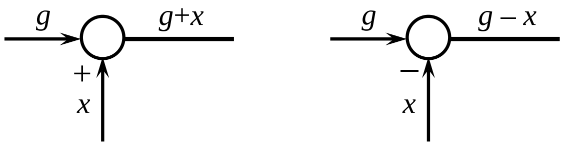


Рисунок II.1. Изображение в случае положительной и отрицательной обратной связи.

Последовательным соединением звеньев называется соединение, при котором выходная переменная предшествующего звена является входной переменной последующего звена.

При последовательном соединении передаточные функции звеньев перемножаются: цепочку из последовательно соединенных звеньев с передаточными функциями $W_1(p)$, $W_2(p)$, … , $W_n(p)$ можно заменить одним звеном с передаточной функцией

$$W(p) = W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot \ldots \cdot W_n(p). \tag{II.4}$$

(см. рис. II.2).

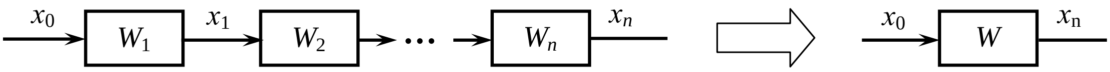


Рисунок II.2. Передаточная функция последовательного соединения звеньев.

Параллельным соединением звеньев называется соединение, при котором на входы всех звеньев подается одно и то же воздействие, а их выходные переменные складываются.

При параллельном соединении передаточные функции звеньев складываются: параллельно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p)$, $W_2(p)$, … , $W_n(p)$ можно заменить одним звеном с передаточной функцией

$$W(p) = W_1(p)+W_2(p)+ \ldots +W_n(p) \tag{II.5}$$

(см. рис. II.3).

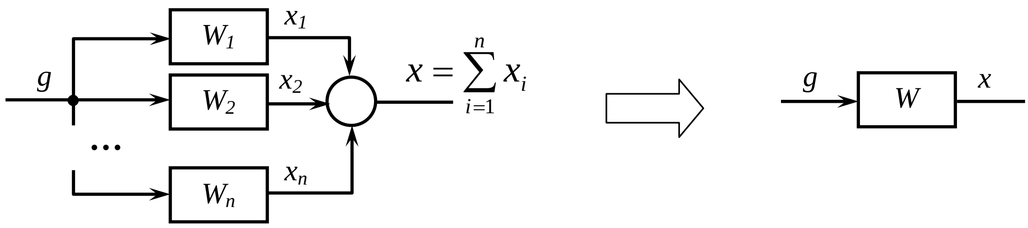


Рисунок II.3. Передаточная функция параллельного соединения звеньев.

Обратным соединением (*звеном, охваченным обратной связью*) называется соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подается на вход звена обратной связи, выход которого складывается с входом первого звена. Изображение обратного соединения показано на рис. II.4.

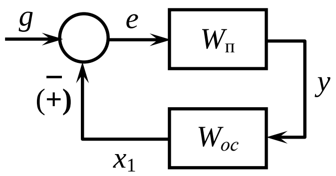


Рисунок II.4. Обратное соединение звеньев.

Если сигнал обратной связи вычитается, то обратная связь называется *отрицательной*, в противном случае – *положительной*.

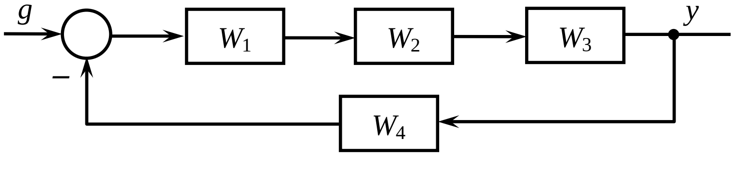
Передаточная функция при обратном соединении равна

$$W(p) = \frac{W_п(p)}{1 - W_к(p)}, \qquad \text{(II.6)}$$

где $W_к(p) = W_п(p) \cdot W_{ос}(p) \cdot W_\Sigma(p)$ – *передаточная функция контура*,

$$W_\Sigma(p) = \begin{cases} -1 & \text{при отрицательной обратной связи,} \\ 1 & \text{при положительной обратной связи,} \end{cases}$$

Пример. Дана структурная схема системы управления.



Найдем передаточную функцию относительно входа g и выхода y.

Передаточная функция прямой цепи находится в соответствии с (II.4):

$W_п = W_1 W_2 W_3$ (вход сумматора имеет знак «+»).

Передаточная функция контура равна

$W_к = -\, W_1 W_2 W_3 W_4$ (обратная связь отрицательна).

Поэтому, в соответствии с (II.6), искомая передаточная функция равна

$$W = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4}.$$

Пример. Выше уже была найдена передаточная функция системы, описываемой непрерывной моделью Самуэльсона-Хикса в форме (3.28):

$$W(p) = \frac{1-c}{p^2 + (1-r)p + 1 - c}.$$

В разделе 3.2.3 при рассмотрении модели (3.28) отмечалось, что в случае $(1-r)^2 - 4(1-c) > 0$ система ведет себя как два последовательно соединенных инерционных звена. Покажем это.

Рассмотрим многочлен $Q(\lambda) = \lambda^2 + (1-r)\lambda + 1 - c$. При $r < 1 - 2\sqrt{1-c}$ корни этого многочлена действительны и различны:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}.$$

Поэтому $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. Формально применив аналогичное преобразование к собственному оператору системы $Q(p)$, придем к следующему представлению передаточной функции системы:

$$W(p) = \frac{1-c}{p^2 + (1-r)p + 1 - c} = \frac{1-c}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)} = \frac{1-c}{(p-\lambda_1)} \cdot \frac{1}{(p-\lambda_2)}.$$

В соответствии с (II.4), это означает, что система ведет себя как два последовательно соединенных инерционных звена с постоянными времени

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}.$$

Приложение III. Устойчивость линейных непрерывных систем управления

Рассмотрим линейную непрерывную систему, определяемую уравнением (II.1). Назначение системы управления – обеспечение заданного режима (определяемого целью управления), называемого *невозмущенным движением*. Если на систему, помимо управляющего воздействия, действует возмущение, то фактическое движение – *возмущенное движение* – отличается от невозмущенного.

Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*, если после окончания действия возмущения возмущенное движение $y(t)$ стремится к невозмущенному движению $y_{\text{н}}(t)$: $y(t) \to y_{\text{н}}(t)$ при $t \to \infty$.

Линейная система управления называется *асимптотически устойчивой*, если любое ее невозмущенное движение, определяемое задающим воздействием, асимптотически устойчиво.

Не вдаваясь в подробности, сформулируем некоторые условия, которым должна удовлетворять устойчивая система[16].

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (II.1),

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_n y = 0, \tag{III.1}$$

описывает поведение системы при отсутствии внешних воздействий. Общее решение этого уравнения $y_{\text{с}}(t)$ – так называемое *свободное движение системы* определяется только начальными условиями.

В теории управления доказано: для того, чтобы невозмущенное движение было асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to \infty} y_c(t) = 0. \tag{III.2}$$

Условие (III.2), фактически, является математическим определением асимптотической устойчивости линейных непрерывных систем управления.

Характеристическое уравнение однородного уравнения (III.1)

[16] Более подробное обоснование условий устойчивости можно найти, например, в [12].

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad \text{(III.3)}$$

называется также *характеристическим уравнением системы*, определяемой уравнением (II.1). Многочлен $Q(\lambda)$ называется характеристическим полиномом системы (II.1). Он может быть получен из собственного оператора системы $Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ подстановкой $p = \lambda$:

$$Q(\lambda) = Q(p)\big|_{p=\lambda}.$$

Теорема (основное условие устойчивости). Для того чтобы система, определяемая уравнением (II.1), была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (III.3) имели отрицательную действительную часть:

$$\left(\lim_{t\to\infty} y_c(t) = 0\right) \iff \operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Замечание. Для систем порядка $n > 2$ аналитическое вычисление корней характеристического уравнения может оказаться достаточно трудоемким или даже вовсе невозможным (при $n > 4$). Поэтому в теории управления разработаны специальные критерии, которые позволяют проверить устойчивость системы без явного вычисления корней уравнения (III.3). Поскольку порядок рассматриваемых в рамках данного пособия экономических систем не превышает 2, а для таких систем применение основного условия устойчивости не вызывает затруднений, в данном изложении ограничимся только этим условием.

Приложение IV. Условия Куна-Таккера

Рассмотрим задачу математического программирования

$$F(\bar{x}) \quad \to \quad \max \qquad \text{(IV.1)}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n)^T$, при ограничениях

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ \ldots, \ n. \qquad \text{(IV.2)}$$

Необходимые условия существования в точке $\bar{x}*$ локального экстремума задачи (IV.1) – (IV.2) определяются системой из ($2n$ + 1) условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}*) \ \leq \ 0, \quad i = 1, 2, \ \ldots, \ n, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \bar{x}}(\bar{x}*) \cdot \bar{x}* \ = \ 0, \\ \\ x_i^* \ \geq \ 0, \quad i = 1, 2, \ \ldots, \ n, \end{cases} \qquad \text{(IV.3)}$$

где $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{x}}(\bar{x}*) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}*), \ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}*), \ \ldots, \ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}*) \right)$.

Обоснование этого утверждения можно найти, например, в [1].

Система (IV.3) содержит одно условие-равенство и $2n$ неравенств. Если в левой части равенства записать скалярное произведение в развернутой форме, то условие-равенство примет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}*) \cdot x_1^* + \ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}*) \cdot x_2^* + \ \ldots \ + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}*) \cdot x_n^* \ = \ 0.$$

Рассмотренная задача условной оптимизации, система ограничений которой включает только условия неотрицательности переменных (IV.2), является частным случаем более общей задачи математического программирования:

$$F(\bar{x}) \quad \to \quad \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\varphi_i(\bar{x}) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ \ldots, \ m, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ \ldots, \ n. \end{aligned} \qquad \text{(IV.4)}$$

Путем введения дополнительных переменных задача с ограничениями

(IV.4) может быть приведена к задаче типа (IV.1) – (IV.2).

Обозначим: $s_i = b_i - \varphi_i(\bar{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда задача оптимизации с ограничениями (IV.4) сводится к задаче с $n + m$ переменными:

$$\begin{aligned} & F(\bar{x}) \quad \to \quad \max, \\ & \varphi_i(\bar{x}) + s_i = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \qquad \text{(IV.5)}$$

Без учета условий неотрицательности переменных задача (IV.5) является классической задачей на условный максимум, которая решается путем нахождения безусловного экстремума функции Лагранжа

$$L(\bar{x}, \bar{s}, \bar{\lambda}) = F(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (b_i - \varphi_i(\bar{x}) - s_i).$$

В итоге получена задача

$$\begin{aligned} & L(\bar{x}, \bar{s}, \bar{\lambda}) = F(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (b_i - \varphi_i(\bar{x}) - s_i) \quad \to \quad \max, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \qquad \text{(IV.6)}$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \quad \bar{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)^T$,

т. е. задача условной максимизации с ограничениями типа (IV.2). Необходимое условие экстремума этой задачи записывается в соответствии с (IV.3):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x}^*, \bar{s}^*, \bar{\lambda}^*) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}^*) - \bar{\lambda}^* \cdot \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j}(\bar{x}^*) \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \bar{x}}(\bar{x}^*, \bar{s}^*, \bar{\lambda}^*) \cdot \bar{x}^* = \left(\dfrac{\partial F}{\partial \bar{x}}(\bar{x}^*) - \bar{\lambda}^* \cdot \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}^*) \right) \cdot \bar{x}^* = 0, \\ x_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial s_i}(\bar{x}^*, \bar{s}^*, \bar{\lambda}^*) = -\lambda_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \bar{s}}(\bar{x}^*, \bar{s}^*, \bar{\lambda}^*) \cdot \bar{s}^* = -\bar{\lambda}^* \cdot \bar{s}^* = 0, \\ s_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \qquad \text{(IV.7)}$$

где $\dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{x}}(\overline{x}*)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\overline{x}*) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\overline{x}*) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(\overline{x}*) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\overline{x}*) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\overline{x}*) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(\overline{x}*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(\overline{x}*) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\overline{x}*) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(\overline{x}*) \end{pmatrix}.$

После замены переменных s_i, $i=1, 2, \ldots, m$, соответствующими им выражениями получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}*)-\overline{\lambda}*\cdot\dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_j}(\overline{x}*) \le 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial \overline{x}}(\overline{x}*)-\overline{\lambda}*\cdot\dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{x}}(\overline{x}*)\right)\cdot\overline{x}* = 0, \\ \overline{\lambda}*\cdot\left(\overline{b}-\overline{\varphi}(\overline{x}*)\right) = 0, \\ x_j^* \ge 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \\ b_i^*-\varphi_i(\overline{x}*) \ge 0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \\ \lambda_i^* \ge 0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \end{cases} \qquad \text{(IV.8)}$$

которая определяет необходимые условия экстремума задачи условной оптимизации с ограничениями (IV.4).

Условия (IV.8) называются *условиями Куна-Таккера* для задачи с ограничениями (IV.4). В большинстве случаев применение условий Куна-Таккера позволяет выявить конечное число точек, подозрительных на экстремум. Для получения окончательного ответа требуется изучение выявленных точек (в простейшем случае – вычисление значений целевой функции в каждой из этих точек и сравнение этих значений между собой).